Душан Ђукић
Иван Аранђеловић
Александар Пејчев
Јелена Томановић
Даворка Јандрлић
Рада Мутавџић Ђукић
Милош Вучић

МАТЕМАТИКА 1

уџбеник и збирка задатака

Универзитет у Београду
Машински факултет
Катедра за математику

Београд, 2020.

Душан Ђукић
Иван Аранђеловић
Александар Пејчев
Јелена Томановић
Даворка Јандрлић
Рада Мутавџић Ђукић
Милош Вучић

МАТЕМАТИКА 1

уџбеник и збирка задатака

Универзитет у Београду
Машински факултет
Катедра за математику

Београд, 2020.

- Др Иван Аранђеловић, редовни професор
  Машински факултет у Београду
- Др Александар Пејчев, ванредни професор
  Машински факултет у Београду
- Др Душан Ђукић, доцент
  Машински факултет у Београду
- Др Даворка Јандрлић, доцент
  Машински факултет у Београду
- Др Јелена Томановић, доцент
  Машински факултет у Београду
- Др Рада Мутавџић Ђукић, доцент
  Машински факултет у Београду
- Милош Вучић, сарадник у настави
  Машински факултет у Београду

Математика 1: уџбеник и збирка задатака

Прво издање

Рецензенти:
- Стојан Раденовић, редовни професор у пензији
  Машински факултет у Београду
- Миодраг Спалевић, редовни професор
  Машински факултет у Београду

Издавач:
- Универзитет у Београду
  Машински факултет
  Краљице Марије 16, Београд
  тел. 011/3302200, факс 011/3370364

За издавача:
- Декан др Радивоје Митровић, редовни професор

Главни и одговорни уредник:
- Др Милан Лечић, редовни професор

Odobreno za štampu odlukom Dekana Mašinskog fakulteta u Beogradu
Broj odluke: 24/2020 (od 29.10.2020.)

Штампа: Планета принт

Тираж: 1500 примерака

YU ISBN: 978-86-6060-057-0

Београд, 2020.

Предговор

Овај уџбеник је написан с циљем да прати план и програм за предмет Математика 1 на Машинском факултету Универзитета у Београду. Осим студентима Машинског факултета, можда ће бити од користи и студентима других факултета који уче по истом или сличном програму.

Књига се састоји из два приближно једнака дела.

Први део је посвећен темама из линеарне алгебре са аналитичком геометријом. Овај део се састоји из 6 глава:

1. Матрични рачун;
2. Системи линеарних једначина;
3. Вектори у геометрији;
4. Вектори у координатама;
5. Права и раван;
6. Криве другог реда.

Други део је посвећен основама диференцијалног рачуна. Ову материју студенти ће даље обрађивати у предметима Математика 2 и Математика 3.

7. Функције;
8. Лимеси;
9. Изводи;
10. Примене диференцијалног рачуна;
11. Испитивање тока функције;
12. Тејлоров полином;
13. Параметарски задате криве.

Свака глава је пропраћена примерима и одређеним бројем задатака са решењима с мање или више детаља. Неки од задатака су одабрани за припрему писменог испита, док други имају за циљ илустрацију градива. Студент који је савладао градиво требало би да без тешкоћа уради велику већину задатака.

Најзад, ваља додати и да је ова књига настала као резултат сарадње неколико колега чије методе и схватања наставе имају мало тога заједничког. Посао је поштено подељен. Текст је писало нас шесторо - Д. Ђукић, И. Аранђеловић, Д. Јандрлић, Р. Мутавџић Ђукић, А. Пејчев и Ј. Томановић. Слике су нацртали Д. Ђукић, Р. Мутавџић Ђукић и М. Вучић. Техничко сређивање и форматирање текста радили су Д. Ђукић и Р. Мутавџић Ђукић. Пре рецензента текст је прегледао М. Вучић.

У складу с наведеним, читалац ће приметити различите стилове писања, изражавања и представљања материје. Писац ових редова није дао себи за право да стилове колега прилагођава свом, нити би то било изводљиво без писања целе књиге испочетка. Надамо се да ово није нашкодило квалитету уџбеника, већ да га је, напротив, учинило бољим.

У Београду, 2020. године

≪празна страница≫

Садржај

Детерминанта се множи реалним бројем тако што се елементи једне врсте (или колоне) помноже тим бројем.

Пример 1.17. Детерминанта $|A| = \begin{vmatrix} 16 & 32 \\ 3 & 20 \end{vmatrix}$ се може помножити бројем $\frac{1}{4}$ на више начина, рецимо множењем 1. врсте или 2. колоне тим бројем:

$$\frac{1}{4} \cdot |A| = \begin{vmatrix} \frac{1}{4} \cdot 16 & \frac{1}{4} \cdot 32 \\ 3 & 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 3 & 20 \end{vmatrix} = 56,$$

$$\frac{1}{4} \cdot |A| = \begin{vmatrix} 16 & \frac{1}{4} \cdot 32 \\ 3 & \frac{1}{4} \cdot 20 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16 & 8 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 56.$$

Ако се сваки елемент i-те врсте детерминанте $|A|$ реда n може записати као $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$, $j = 1, 2, ..., n$, онда важи $|A| = |B| + |C|$, где су $|B|$ и $|C|$ детерминанте реда n које имају исте елементе као и детерминанта $|A|$, осим што се у i-тој врсти детерминанте $|B|$ налазе елементи b_{ij}, а у i-тој врсти детерминанте $|C|$ елементи c_{ij}. Аналогна особина важи и за колоне. Описано правило назива се *правилом сабирања детерминанти*. Дакле, две детерминанте могу да се саберу ако су истог реда и ако су им све врсте (или колоне), осим (највише) једне, исте.

Пример 1.18.

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 4 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -2 & 7 \\ 4 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 + (-2) & 7 \\ 4 & -4 + 5 & 2 \\ 0 & 1 + 1 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 4 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 9 \end{vmatrix}.$$

1.3. Инверзна матрица

Нека је

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

квадратна матрица реда n. *Инверзна матрица* матрице A, која се означава са A^{-1}, је квадратна матрица реда n таква да је $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Квадратна матрица за коју постоји њена инверзна матрица назива се *регуларном*, док се квадратна матрица за коју не постоји инверзна матрица назива *сингуларном*. Свака регуларна матрица има јединствену инверзну матрицу.

Квадратна матрица A је регуларна ако и само ако је $\det A \neq 0$.

Инверзна матрица регуларне матрице A одређује се по формули

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*,$$

где је са A^* означена *адјунгована матрица* матрице A. Важи

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix},$$

где су са A_{ij} означени кофактори који одговарају елементима a_{ij}, $i, j = 1, 2, ..., n$, матрице A.

Пример 1.19. Одредити инверзну матрицу матрице $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

Решење. Како је $\det A = -3 \neq 0$, то је A регуларна матрица. Да бисмо одредили њену адјунговану матрицу, прво рачунамо кофакторе:

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3, \qquad A_{13} = + \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -8, \quad A_{22} = + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2,$$

$$A_{31} = + \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{32} = - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{33} = + \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1,$$

па је

$$A^* = \begin{bmatrix} -3 & -3 & 0 \\ -8 & -5 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -3 & -8 & 1 \\ -3 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Коначно је

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* = \frac{1}{-3} \cdot \begin{bmatrix} -3 & -8 & 1 \\ -3 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8/3 & -1/3 \\ 1 & 5/3 & -1/3 \\ 0 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix}.$$

Пример 1.20. Матрица $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ је сингуларна, јер је $\det A = 0$ (зато се када треба одредити инверзну матрицу прво рачуна детерминанта, како би се установило да ли инверзна матрица уопште постоји).

Нека су A и B регуларне матрице истог реда. Тада важи:

$$(A^{-1})^{-1} = A, \quad \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}, \quad (A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

Регуларна матрица за коју је $A^{-1} = A^T$ зове се *ортогонална матрица*. Производ две ортогоналне матрице је такође ортогонална матрица, тј. ако је $A^{-1} = A^T$ и $B^{-1} = B^T$, онда је и $(A \cdot B)^{-1} = (A \cdot B)^T$.

1.4. Елементарне трансформације и ранг матрице

Нека је A матрица типа $m \times n$. *Ранг* матрице A, у ознаци $r(A)$, је ред њене регуларне квадратне подматрице такве да су све квадратне подматрице већег реда, ако постоје, сингуларне. Приметимо да мора бити $r(A) \leqslant \min\{m, n\}$.

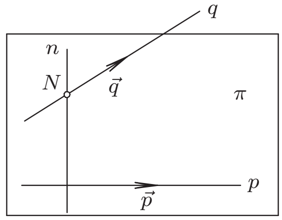
Елементарне трансформације матрице су трансформације при којима се не мења ранг матрице. У елементарне трансформације спадају:

1. замена места две врсте (или колоне);
2. множење врсте (или колоне) реалним бројем различитим од 0;
3. додавање једној врсти (или колони) неке друге врсте (или колоне) помножене било којим реалним бројем.

Пример 5.9. Наћи заједничку нормалу двеју мимоилазних правих $p: \frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z}{-1}$ и $q: \frac{x+1}{-1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-5}{3}$.

Решење. Вектори праваца правих p и q су редом $\vec{p} = (2, -1, -1)$ и $\vec{q} = (-1, 2, 3)$.

Прво одређујемо правац $\vec{n}$ тражене заједничке нормале n. Знамо да је $\vec{n} \perp \vec{p}$ и $\vec{n} \perp \vec{q}$, па је $\vec{n}$ облика $\lambda(\vec{p}\times\vec{q}) = \lambda(-1, -5, 3)$, где је $\lambda \neq 0$ произвољан реална број. Узимамо $\lambda = 1$, те је $\vec{n} = (-1, -5, 3)$.



Сада ћемо одредити пресечну тачку N правих n и q. Она припада равни π која садржи праве p и n, па је $N = q \cap \pi$. Из параметарског облика праве q следи да је тачка N облика $(x, y, z) = (-1, -1, 5) + t(-1, 2, 3) = (-1-t, -1+2t, 5+3t)$.

Вектор нормале на раван π је облика $\vec{n}_\pi = \lambda_1(\vec{p} \times \vec{n}) = \lambda_1(-8, -5, -11)$. Ако узмемо $\lambda_1 = -1$, добијамо $\vec{n}_\pi = (8, 5, 11)$. Раван π најзад одређујемо из услова $p \subset \pi$: тада произвољна тачка праве p, рецимо тачка $P(-1, 3, 0)$, лежи на π, па је њена једначина $8(x+1) + 5(y-3) + 11(z-0) = 0$, тј. $8x + 5y + 11z - 7 = 0$.

Из припадности тачке N равни π добијамо $8(-1-t) + 5(-1+2t) + 11(5+3t) - 7 = 0$, тј. $35t + 35 = 0$, па је $t = -1$ и $N = (0, -3, 2)$.

Према томе, права n има параметарски облик $N + t\vec{n} = (0, -3, 2) + t(-1, -5, 3)$.

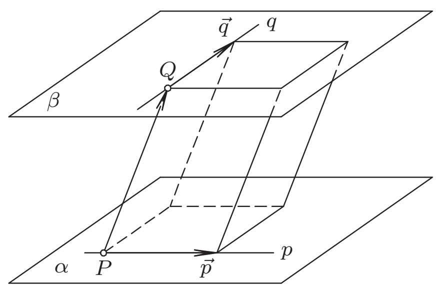
Може се показати да је управо растојање између подножја M и N заједничке нормале (најкраће) растојање између мимоилазних правих p и q. За одређивање тог растојања често се користи формула дата наредном теоремом.

Тврђење 5.8.
Растојање између мимоилазних правих $p = P + t\vec{p}$ и $q = Q + s\vec{q}$ $(t, s \in \mathbb{R})$ је

$$\frac{|[\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ}]|}{|\vec{p} \times \vec{q}|}.$$

Доказ. Нека су α и β паралелне равни такве да раван α садржи праву p и паралелна је правој q, док раван β садржи праву q и паралелна је правој p.

Вектори $\vec{p}$, $\vec{q}$ и $\overrightarrow{PQ}$ одређују паралелепипед запремине $|[\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ}]|$. За његову основу можемо узети паралелограм који одређују вектори $\vec{p}$ и $\vec{q}$, налази се у равни α и чија је површина $|\vec{p}\times\vec{q}|$. Одговарајућа висина паралелепипеда једнака је растојању паралелних равни α и β, што је и растојање између мимоилазних правих p и q, одакле следи формула. $\square$



Пример 5.10. Наћи растојање између мимоилазних правих $p: \frac{x+1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{0}$ и $q: \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{0} = \frac{z-2}{1}$.

Решење. Параметарске једначине правих p и q су редом $p = P + t\vec{p}$ и $q = Q + s\vec{q}$, где је $P(-1, 1, 0)$, $Q(-1, 0, 2)$, $\vec{p} = (1, -1, 0)$, $\vec{q} = (-2, 0, 1)$ и t и s су произвољни реални бројеви. Применом претходне теореме добијамо да је растојање између датих правих $d = \frac{|[\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ}]|}{|\vec{p}\times\vec{q}|}$. Како је $|[\vec{p}, \vec{q}, \overrightarrow{PQ}]| = 3$ и $|\vec{p} \times \vec{q}| = \sqrt{6}$, то је $d = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

5.7. Међусобни положај две равни

Две равни у простору могу да се поклапају, да буду паралелне или да се секу по правој. Нека су дате равни $\alpha : a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$ и $\beta : a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$. Означимо са $\vec{n}_\alpha$ и $\vec{n}_\beta$ редом њихове векторе нормала.

(i) Равни α и β се поклапају ако и само ако је $(a_2, b_2, c_2, d_2) = \lambda(a_1, b_1, c_1, d_1)$ за неки број $\lambda \neq 0$.

(ii) Равни α и β су паралелне ако и само ако је $(a_2, b_2, c_2) = \lambda(a_1, b_1, c_1)$ за неки број $\lambda \neq 0$. То се може написати и у облику $|\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta| = 0$.

(iii) Равни α и β се секу по правој ако и само ако нису паралелне, тј. ако и само ако важи $|\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta| \neq 0$.

5.8. Међусобни положај праве и равни

Права $p = P_0 + t\vec{p}$ $(t \in \mathbb{R})$ и раван α чији је вектор нормале $\vec{n}_\alpha$ могу да се секу у једној тачки, да буду паралелне, или да права припада равни.

(i) Права p припада равни α ако и само ако је $\vec{p} \cdot \vec{n}_\alpha = 0$ и $P_0 \in \alpha$.

(ii) Права p је паралелна равни α $(p \cap \alpha = \emptyset)$ ако и само ако је $\vec{p} \cdot \vec{n}_\alpha = 0$ и $P_0 \notin \alpha$.

(iii) Права p и раван α се секу у тачки ако и само ако је $\vec{p} \cdot \vec{n}_\alpha \neq 0$.

Пример 5.11. У ком су међусобном положају права $p : (x, y, z) = (1, 0, -1) + t(1, 2, -3)$ и раван $\alpha : 2x - y = 3$?

Решење. Вектор правца дате праве $\vec{p} = (1, 2, -3)$ и вектор нормале на дату раван $\vec{n}_\alpha = (2, -1, 0)$ су нормални, јер је $\vec{p} \cdot \vec{n}_\alpha = 0$. Тачка $(1, 0, -1)$ са праве p не припада равни α, јер је $2 \cdot 1 - 0 \neq 3$, па су права p и раван α паралелне.

5.9. Угао између две праве

Праве $p = P + t\vec{p}$ и $q = Q + s\vec{q}$ $(t, s \in \mathbb{R})$ граде два угла, а за угао између њих обично узимамо онај који није туп, тј.

$$\sphericalangle(p, q) = \arccos \frac{|\vec{p} \cdot \vec{q}|}{|\vec{p}||\vec{q}|}.$$

Пример 5.12. Израчунати угао између правих $p : (x, y, z) = (1, 0, -1) + t(2, 1, 3)$ и $q : (x, y, z) = (2, 1, 1) + s(1, 3, -2)$.

Решење. Тражени угао је $\arccos \dfrac{|(2, 1, 3) \cdot (1, 3, -2)|}{|(2, 1, 3)||(1, 3, -2)|} = \arccos \dfrac{1}{14}$.

5.10. Угао између две равни

Угао између двеју равни α и β једнак је углу између њихових нормала. Према томе, ако су њихови вектори нормала редом $\vec{n}_\alpha$ и $\vec{n}_\beta$, тај угао је

$$\sphericalangle(\alpha, \beta) = \arccos \frac{|\vec{n}_\alpha \cdot \vec{n}_\beta|}{|\vec{n}_\alpha||\vec{n}_\beta|}.$$

Пример 5.13. Наћи угао између равни $\alpha : x + 2y - 2z - 3 = 0$ и $\beta : 4x + 3y + 9 = 0$.

(ii) $A=0, \quad D\neq 0$: Допуњавањем до потпуног квадрата сабирака Cy^2+2Ey долазимо до једначине облика

$$Cy'^2+2Dx', \quad C\cdot D\neq 0;$$

у односу на координатни систем $O'x'y'$ који је добијен транслацијом система Oxy.

(iii) $A=0, \quad D\neq 0$: Допуњавањем до потпуног квадрата сабирака Cy^2+2Ey добијамо једначину:

$$C'y'^2+F', \quad C'\neq 0$$

у односу на координатни систем $O'x'y'$ који је добијен транслацијом система Oxy.

Пример 6.1. Коју криву представља једначина $x^2+y^2-4x+6y+12=0$?

Решење. Допуном до потпуног квадрата једначину можемо написати $(x-2)^2+(y+3)^2 = 1$. Ако уведемо да је $x'=x-2$ и $y'=y+3$ добијамо једначину кружнице са центром у координатном почетку и полупречником 1: $x'^2+y'^2=1$ у односу на нови координатни систем $O'x'y'$ где су координате новог центра $O'=(2,-3)$.

Пример 6.2. Нека је дата крива $x^2+y^2=1$. Како гласи њена једначина у новом координатном систему $Ox'y'$ који се добија ротацијом система Oxy за угао $\frac{\pi}{4}$?

Решење. Применимо формуле за трансформацију координата ротацијом (6) и добијамо

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\tfrac{\pi}{4}-y'\sin\tfrac{\pi}{4} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(x'-y') \\ y &= x'\sin\tfrac{\pi}{4}+y'\cos\tfrac{\pi}{4} &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}(x'+y') \end{aligned}$$

Заменимо добијене изразе за x и y у полазну једначину и добијамо $x'^2+y'^2=1$, што заправо представља исту криву - кружницу са центром у координатном почетку. Резултат је очекиван јер се у овом случају ротацијом крива не мења. Наравно, ово је случај са кружницом али када је у питању друга крива њен облик у новом координатном систему се мења.

Пример 6.3. Размотримо сада криву $x^2-y^2=1$. Како гласи њена једначина у новом координатном систему $Ox'y'$ који се добија ротацијом система Oxy за угао $\frac{\pi}{4}$?

Решење. Како је угао ротације исти као у претходном задатку и овде имамо

$$x=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y') \quad \text{и} \quad y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y').$$

Заменом у полазну једначину добијамо $x'y'=-1/2$.

6.6. Алгебарске површи другог реда

Општи обик алгебарске једначине другог степена по променљивим x, y и z је

$$\begin{gathered} Ax^2+By^2+Cz^2+2Dxy+2Eyz+2Fxy+2Gx+2Hy+2Kz+L=0 \\ (A^2+B^2+C^2+D^2+E^2+F^2>0). \end{gathered} \tag{9}$$

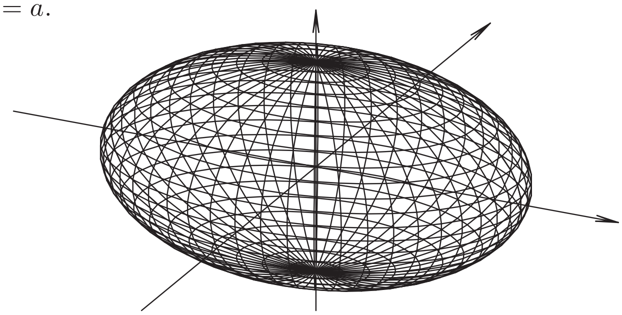
Алгебарска површ другог реда је свака површ која се може задати једначином наведеног облика.

Као што у правоуглом координатном систему равни имамо канонске једначине стандардних кривих другог реда, тако и у тродимензионалном простору у односу на погодно изабрани правоугли координатни систем имамо канонске једначине стандардних површи другог реда.

Елипсоид.
Површ другог реда дата једначином

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

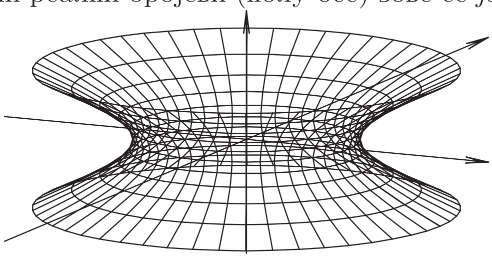
где су a, b и c позитивни реални бројеви (полу-осе) зове се елипсоид. Центар елипсоида је координатни почетак, а свака од координатних равни га сече по елипси. Када је $a = b = c > 0$, у питању је *сфера* са центром у координатном почетку и полупречником $r = a$.



Хиперболоиди.
Површ другог реда дата једначином

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

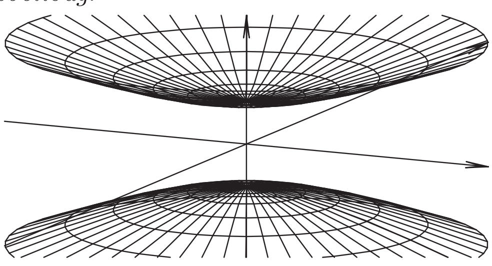
где су a, b и c позитивни реални бројеви (полу-осе) зове се *једнокрилни хиперболоид*.



Површ другог реда дата једначином

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

зове се *двокрилни хиперболоид*.



Решење. (а) Када $x \to 2$, имамо $x^4 - 2 \to 14$ и $x^2 - 4 \to 0$, па $\dfrac{x^4-2}{x^2-4} \to \infty$.

(б) У тачки $x = 1$ и бројилац и именилац су једнаки нули, али је $x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2)$ и $x^4 - 4x + 3 = (x-1)^2(x^2+2x+3)$. Скраћивањем $(x-1)^2$ добијамо

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} = \lim_{x\to 1} \frac{x+2}{x^2+2x+3} = \frac{1}{2}.$$

Шта се догађа ако је a једна од две бесконачности? Знамо да $1/x \to 0$ када $x \to \pm\infty$. Како

$$\frac{P(x)}{x^n} = p_n + p_{n-1}\cdot\frac{1}{x} + \dots + p_0 \cdot \frac{1}{x^n} \to p_n \quad \text{и} \quad \frac{Q(x)}{x^m} = q_m + q_{m-1}\cdot\frac{1}{x} + \dots + q_0\cdot\frac{1}{x^m} \to q_m,$$

имамо

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x\to\pm\infty} x^{n-m} \cdot \lim_{x\to\pm\infty} \frac{P(x)/x^n}{Q(x)/x^m} = \frac{p_n}{q_m} \lim_{x\to\pm\infty} x^{n-m},$$

при чему је $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^{n-m}$ једнако 0 ако је $n < m$, 1 ако је $n = m$, а ∞ ако је $n > m$.

Пример 8.12. Израчунати $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x(x^2-2x-3)^2}{3x^5+2x^4+5}$.

Решење. Како $\frac{1}{x} \to 0$ када $x \to \infty$, дељењем бројиоца и имениоца са x^5 добијамо

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x(x^2-2x-3)^2}{3x^5+2x^4+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{(1-\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2})^2}{3+\frac{2}{x}+\frac{5}{x^5}} = \frac{(1-0-0)^2}{3+0+0} = \frac{1}{3}.$$

Има неколико лимеса, популарно познатих као „таблични”, које је добро запамтити.

Тврђење 8.9. (таблични лимеси)

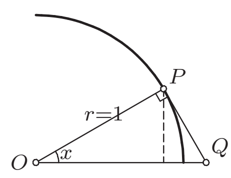
(а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$; (б) $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = e$; (в) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$; (г) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$.

Другим речима,

$$\sin x \sim x, \quad \ln(1+x) \sim x \quad \text{и} \quad e^x - 1 \sim x \quad \text{када } x \to 0.$$

Доказ. (а) Посматрајмо тачку $P(\cos x, \sin x)$ на јединичном кругу. Њено растојање од x-осе по кругу је x, а најкраће растојање од x-осе је $\sin x$, па је $\sin x \leqslant x$. С друге стране, површина кружног исечка између x-осе и праве OP је $\frac{1}{2}x$, а површина троугла OPQ је $\frac{1}{2}\mathrm{tg}x$, па је $x \leqslant \mathrm{tg}x$. Према томе, $\dfrac{\sin x}{\sin x} \geqslant \dfrac{\sin x}{x} \geqslant \dfrac{\sin x}{\mathrm{tg}\, x}$, тј.

$$\cos x \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant 1.$$



Како је $\lim\limits_{x\to 0} \cos x = \lim\limits_{x\to 0} 1 = 1$, следи да је и $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$.

(б) Ово је у ствари једна од неколико еквивалентних дефиниција броја e.

(в) Логаритмовање једнакости (б) даје $\lim\limits_{n\to+\infty} n \ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right) = 1$. Ако сада означимо $x = 1 + \frac{1}{n} \to 1$, тј. $n = \frac{1}{x-1}$, добићемо тражену једнакост.

(г) Следи из (в) сменом $t = \ln x \to 0$ и $x = e^t$. $\square$

Пример 8.13. Израчунати $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

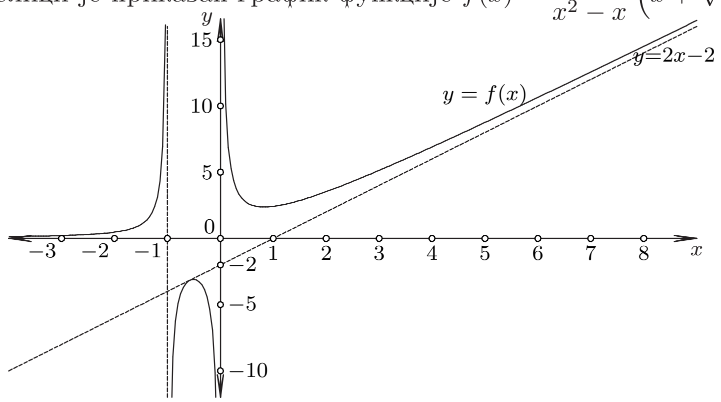
Решење. Подсетимо се да је $1-\cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$. Увођењем смене $\frac{x}{2}=t\to 0$ добијамо

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin^2 t}{4t^2}=\frac{1}{2}\lim_{t\to 0}\left(\frac{\sin t}{t}\right)^2=\frac{1}{2}\left(\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}\right)^2=\frac{1}{2}.$$

8.7. Асимптоте функције

Асимптоте функције f су праве којима се график функције $y=f(x)$ приближава када $x\to\pm\infty$ или $y\to\pm\infty$ - нека врста тангенти у бесконачним тачкама - и нема их свака функција.

Пример 8.14. На слици је приказан график функције $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-x}\Big(x+\sqrt{x^2+1}\Big)$:



Уочавамо три типа асимптота:

- две *вертикалне* асимптоте $x=-1$ и $x=0$,
- *хоризонталну* асимптоту $y=0$ (када $x\to-\infty$) и
- *косу* аситпоту $y=2x-2$ (када $x\to+\infty$).

Вертикална асимптота је права облика

$$x=a$$

ако функција f није дефинисана у тачки a и

$$\lim_{x\to a^-}f(x)=\pm\infty \quad \text{или} \quad \lim_{x\to a^+}f(x)=\pm\infty \quad \text{(или обоје).}$$

Дакле, тачка a мора да буде на граници домена функције.

Хоризонтална асимптота је права облика

$$y=b$$

ако важи

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=b \quad \text{или} \quad \lim_{x\to-\infty}f(x)=b.$$

Хоризонтална асимптота је подврста косе асимптоте у којој је $k=0$.

Коса асимптота је права облика

$$y=kx+b$$

ако важи

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-kx-b\big)=0 \quad \text{или} \quad \lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-kx-b\big)=0.$$

Пример 9.14. Функција $y = f(x)$ је задата једначином

(а) $x^2 + y^2 = 5$; (б) $x^3 + y^3 = 3(xy + 1)$.

Одредити $y'(1)$, ако је познато да је $y(1) = 2$.

Решење. (а) Решавањем по y добијамо вредност $y = \sqrt{5 - x^2}$ у експлицитном облику. Сада (правилом сложене функције) налазимо $y' = -\frac{x}{\sqrt{5-x^2}} = -\frac{1}{2}$.

(б) Ово је тешко ручно решити по y (не и немогуће - постоји рогобатна формула, позната као Карданова[1], али то је већ тема неке друге приче).

Постоји други начин који нам је овде на располагању. Везу $x^3 + y^3 = 3(xy + 1)$ можемо директно да диференцирамо по x:

$$\frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(y^3) - \frac{d}{dx}(3xy) = 0.$$

- Свакако, $\frac{d}{dx}(x^3) = 3x^2$.
- Колико је $\frac{d}{dx}(y^3)$? Овде морамо да имамо у виду да је y *функција* по x. Зато користимо правило сложене функције: $\frac{d}{dx}(y^3) = 3y^2 \cdot y'$.
- За сабирак $\frac{d}{dx}(3xy)$ користимо правило производа: $\frac{d}{dx}(3xy) = 3(y + xy')$.

Све у свему, добијамо једначину $3x^2 + 3y^2y' = 3(y + xy')$, одакле добијамо израз за y':

$$y' = \frac{y - x^2}{y^2 - x}.$$

Мада немамо експлицитан израз за y, у тачки $x = 1$ знамо да је $y = 2$, тако да имамо све потребне параметре: $y'(1) = \frac{2-1^2}{2^2-1} = \frac{1}{3}$.

Овај метод можемо да применимо за диференцирање инверзне функције. Дакле, нека диференцијабилна функција f бијективно слика интервал (a, b) у интервал (c, d) и $f(x) = y$. Тада она има инверзну функцију $g = f^{-1}$. Диференцирањем једнакости $g(y) = x$ по x добија се $g'(y) \cdot dy/dx = 1$, одакле је $g'(y) = 1/f'(x)$.

Тврђење 9.4. (правило инверзне функције)

Ако је $f^{-1}(y) = x$, онда је

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Применимо ову формулу на инверзне тригонометријске функције.

Пример 9.15. Наћи изводе функција (а) $\arcsin x$, (б) $\arccos x$ и (в) $\operatorname{arctg} x$.

Решење. (а) Нека је $g(y) = \arcsin y = x$. Пошто је $\sin x = y$ и $\cos x = \sqrt{1 - y^2}$, имамо

$$(\arcsin y)' = \frac{1}{(\sin x)'} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}.$$

(б) Пошто је $\arcsin x + \arccos x = \pi/2$ константно, следи $(\arccos y)' = -(\arcsin y)'$.

[1] У овом случају добија се $y = \sqrt[3]{\frac{3 - x^3 + \sqrt{x^6 - 10x^3 + 9}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{3 - x^3 - \sqrt{x^6 - 10x^3 + 9}}{2}}$.

(в) Ако је $g(y) = \operatorname{arctg} y = x$, имамо $\operatorname{tg} x = y$ и $\dfrac{1}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 1 = y^2 + 1$, па је

$$(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} x)'} = \cos^2 x = \frac{1}{y^2+1},$$

јер смо извод функције $\operatorname{tg} x$ већ израчунали у Примеру 9.11.

Понекад је функција задата параметарски:

$$x = f(t) \quad \text{и} \quad y = g(t),$$

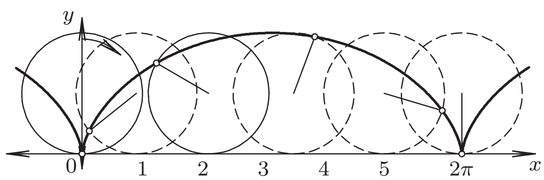
где су функције f и g диференцијабилне у тачки t. Под претпоставком да је $f'(t) \neq 0$, постоји инверзна функција $f^{-1}(x) = t$ и њен извод по x је $\dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{f'(t)}$. Према томе, $y = g(t) = g(f^{-1}(x))$ је сложена функција по x, па можемо да израчунамо њен извод по правилу сложене функције:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{g'(t)}{f'(t)}.$$

Пример 9.16. *Циклоида* је крива дата параметарски:

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t.$$

Ова крива описује кретање фиксне тачке на точку при котрљању точка по правој:



Одредимо нагиб циклоиде (тј. смер кретања посматране тачке) за $t = 2\pi/3$. У тој тачки је $dx/dt = 1 - \cos t$ и $dy/dt = \sin t$, па је

$$k = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\sin t}{1-\cos t} = \operatorname{ctg} \frac{t}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

9.7. Сажетак формула диференцирања

Најважније формуле у вези са изводима разбацане су по овој глави. Овде ћемо их скупити на једном месту. Ипак, ова листа није комплетна - таква и не постоји - и њена сврха није да је научите напамет, већ само да је употребите као подсетник.