Иван Аранђеловић
Душан Ђукић
Даворка Јандрлић
Рада Мутавџић
Александар Пејчев
Јелена Томановић

# Математика 2

Универзитет у Београду
Машински факултет

# МАТЕМАТИКА 2


***Аутори***

**др Иван Аранђеловић, редовни професор**

**др Даворка Јандрлић, доцент**

**др Александар Пејчев, ванредни професор**

**др Душан Ђукић, доцент**

**Јелена Томановић, асистент**

**Рада Мутавџић, асистент**



***Рецензенти***
др Ђорђе Кртинић, ванредни професор, Математички факултет у Београду
др Миодраг Спалевић, редовни професор, Машински факултет у Београду

***Издавач***
Универзитет у Београду – Машински факултет
Краљице Марије 16, 11120 Београд 35
тел.: +381 011 3302 200,
факс: +381 011 3370 364
E-mail: mf@mas.bg.ac.rs
http://www.mas.bg.ac.rs/

***За изавача***
Проф. др Радивоје Митровић

***Уредник***
Проф. Др Милан Лечић

***Тираж***
500 primeraka

***Штампа***
Одобрено за штампу Одлуком Декана Машинског факултета у Београду
br. 02/2019 od 30.01.2019. godine
ISBN 978-86-7083-998-4

# Извештај о рецензији

**Назив: Збирка задатака из Математике 2**

**Аутори: Иван Аранђеловић**

**Душан Ђукић**

**Даворка Јандрлић**

**Рада Мутавџић**

**Александар Пејчев**

**Јелена Томановић**

Материјал обухвата $v$+230 страна и подељен је у четири дела:

1° Неодређени интеграл

2° Одређени интеграл

3° Несвојствени интеграл

4° Диференцијални рачун по више промењљивих

Сваки од делова садржи задатке из одговарајуће области математике. На почетку сваког од делова наведена су тврђења која су потребна за израду задатака који се налазе у том делу, а велики део тих тврђења су и доказана. Ниво задатака је прилагођен стандардима писменог испита из Математике 2 на Машинском факултету, па се рукопис може користити за припрему писменог дела испита, али може битно помоћи и у припреми усменог дела. Задаци су решени детаљно, дат је и низ објашњења која помажу лакшем разумевању, а рачунски делови су спроведени без прескакања корака, што прилично помаже у лакшем праћењу текста.

Садржај је дат на почетку, а списак литературе са 8 наведених референци налази се на крају текста.

**Мишљење и оцена**

- Материјал обрађен у тексту одговара садржају наставног програма предмета Математика 2, који се слуша у другом семестру основних академских студија на Машинском факултету у Београду. Обрађене су сви делови материје која се проучава у овом предмету, сем диференцијалних једначина првог реда, које су већ обрађене у већ постојећој збирци посвећеној Диференцијалним једначинама.
- Поглавља су пажљиво и систематично одабрана, а текст карактерише јасан и прецизан стил писања и савремен методолошки приступ.
- Уџбеник ће бити од користи како за студенте Математике 2, тако и за шире стручне кругове.

Рецензенти:

др Ђорђе Кртинић

др Миодраг Спалевић

# **Збирка задатака из Математике** 2


др Иван Аранђеловић
др Душан Ђукић
др Даворка Јандрлић
Рада Мутавџић
др Александар Пејчев
Јелена Томановић

Универзитет у Београду
Машински факултет
Катедра за Математику

Београд, 2018. године

# Садржај

# Предговор

Збирка задатака из Математике 2 је намењена студентима 1. године Машинског факултета у Београду и покрива комплетно градиво које студенти треба да савладају из предмета Математика 2 у другом семестру изузев Диференцијалних једначина првог реда, које су обрађене у збирци посвећеној Диференцијалним једначинама. Наравно, збирка може бити од користи не само студентима Машинског факултета у Београду већ и другима који се интересују за ову проблематику.

На почетку сваког поглавља дат је одговарајући теоријски увод са прегледом основних метода неопходних за решавање задатака. Већина задатака су детаљно решени.

Посебну захвланост дугујемо др Ђорђу Кртинићу, ванредном професору Математичког факултета у Београду на детаљном читању рукописа и врло корисним саветима које нам је дао у својству рецензента.

Аутори ће бити захвални свима који укажу на евентуалне грешке, како би исте биле отклоњене у наредном издању.

# Глава 1

# Неодређени интеграл

## 1.1 Основне дефиниције и методе интеграције

Нека је функција $f(x)$ дефинисана на интервалу $(a,b)$. *Примитивном функцијом* функције $f(x)$ називамо диференцијабилну функцију $\varphi(x)$ која задовољава једнакост:

$$f(x) = \varphi'(x), \quad x \in (a,b).$$

Функција $f(x)$ је извод своје примитивне функције, тада је $f(x)$ примитивна функција и за $\varphi(x) + c$. То значи да дата функција има више примитивних функција, а разлика између свих примитивних функција исте функције је константа. Ова чињеница се једноставно доказује, јер ако су $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ две примитивне функције исте функције $f(x)$, тада је:

$$F(x) = \varphi(x) - \psi(x) \Rightarrow F'(x) = \varphi'(x) - \psi'(x) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow F(x) = c.$$

**Дефиниција 1.1.** Скуп свих примитивних функција функције $f(x)$ назива се *неодређеним интегралом* функције $f(x)$ и означава се са:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

У претходној дефиницији $f(x)$ је *подинтегрална функција*, док је

$f(x)\,\mathrm{d}x$ *подинтегрални израз*. Ако је $\varphi(x)$ примитивна функција функције $f(x)$ онда се неодређени интеграл може написати:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(x) + c, \quad c \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

О константи $c$ више ће бити дато у поглављу 1.3.1. За сада је довољно рећи да је $c$ константа.

**Теорема 1.1.** Нека је $\varphi(x)$ примитивна функција функције $f(x)$. Тада је:

а) $\mathrm{d}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) = f(x)\,\mathrm{d}x,$

б) $\int \mathrm{d}(\varphi(x)) = \varphi(x) + c,$

в) $\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x, \quad k \in \mathbb{R},$ и

г) $\int \Big[f(x) + g(x)\Big]\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x.$

**Доказ.** У доказивању прве две особине користи се последица теореме из диференцијалног рачуна:

$$\mathrm{d}f(x) = f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

а) Ако се нађе диференцијал једнакости (1.1) и искористи да је $\mathrm{d}(c) = 0$, тада је:

$$\mathrm{d}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right) = \mathrm{d}\varphi(x) = \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\,\mathrm{d}x \Rightarrow \left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = f(x).$$

б) Како је $\mathrm{d}(\varphi) = \varphi'\mathrm{d}x$ следи:

$$\int \mathrm{d}\varphi(x) = \int \varphi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x = \varphi(x) + c.$$

в) Ако се нађе извод леве:

$$\left(\int kf(x)\,\mathrm{d}x\right)' = kf(x),$$

а затим и десне стране једнакости:

$$\left(k\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = k\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = kf(x),$$

из једнакости леве и десне стране тврђење непосредно следи.

г) Извод леве стране једнак је:

$$\left(\int \Big[f(x)+g(x)\Big]\mathrm{d}x\right)' = f(x)+g(x),$$

док је извод десне стране једнак:

$$\begin{aligned}\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x\right)' &= \left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' + \left(\int g(x)\,\mathrm{d}x\right)' \\ &= f(x)+g(x),\end{aligned}$$

чиме је, као и у претходном случају, доказано тврђење.

□

Особине (1.1а) и (1.1б) показују однос извода – диференцијала функције и интеграла, док особине (1.1в) и (1.1г) показују адитивност неодређеног интеграла. Теорема 1.1 омогућава једноставно решавање релативно сложених интеграла. Искористимо једнакост:

$$\Big(\ln(f(x))\Big)' = \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x),$$

у решавању интеграла, који се у општем облику могу записати на следећи начин:

$$\int \frac{1}{f(x)}\cdot f'(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}\left(\ln|f(x)|\right) = \ln|f(x)| + c.$$

Коначно је:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + c. \tag{1.2}$$

У решавању претходног интеграла коришћена је особина (1.1б). Познавање извода, тригонометрије и особина (1.1а) - (1.1г) помаже у решавању интеграла, који се појављују као делови још сложенијих задатака. Наредни примери то показују:

ПРИМЕР: Решити неодређени интеграл:

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}.$$

Ако искористимо $\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha$ тада је:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2\cdot\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\cos^2\frac{x}{2}} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}x}{2\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)'}{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

и применимо (1.2) на дати интеграл:

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + c. \tag{1.3}$$

$\square$

ПРИМЕР: Решити неодређени интеграл:

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}.$$

Дати интеграл се своди на интеграл (1.3). Претходно се мора искористити тригонометријска једнакост $\sin\left(\alpha \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm\cos\alpha$, следи да је дати интеграл једнак:

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)}$$

и применом (1.3) добија се:

$$I = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x + \frac{\pi}{2}}{2}\right| = \ln\left|\operatorname{tg}\frac{2x+\pi}{4}\right| + c.$$

Коначно je:

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos x}=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{2x+\pi}{4}\right|+c. \tag{1.4}$$

□

## 1.2 Таблични – основни интеграли

$$\int x^{\alpha}\mathrm{d}x=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c,\quad \alpha\neq 1. \tag{1.5}$$

$$\int\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x=\ln|x|+c. \tag{1.6}$$

$$\int e^{x}\mathrm{d}x=e^{x}+c. \tag{1.7}$$

$$\int a^{x}\mathrm{d}x=\frac{a^{x}}{\ln a}+c,\quad a\in(0,1)\cup(1,+\infty)\,. \tag{1.8}$$

$$\int\sin x\;\mathrm{d}x=-\cos x+c. \tag{1.9}$$

$$\int\cos x\;\mathrm{d}x=\sin x+c. \tag{1.10}$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\operatorname{tg}x+c. \tag{1.11}$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg}x+c. \tag{1.12}$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arcsin x+c. \tag{1.13}$$

$$\int\frac{-\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}}=\arccos x+c. \tag{1.14}$$

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\operatorname{arctg}x+c. \tag{1.15}$$

$$\int\frac{-\mathrm{d}x}{1+x^2}=\operatorname{arcctg}x+c. \tag{1.16}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a}\right| + c, \;\; a \neq 0. \tag{1.17}$$

$$\int \operatorname{sh} x \ \mathrm{d}x = \operatorname{ch} x + c. \tag{1.18}$$

$$\int \operatorname{ch} x \ \mathrm{d}x = \operatorname{sh} x + c. \tag{1.19}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{ch}^2 x} = \tanh x + c. \tag{1.20}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\coth x + c. \tag{1.21}$$

Добро познавање извода и табличних интеграла често омогућава да се интеграли једноставно реше:

$$\int \cos 2x \ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sin 2x + c.$$

Решење смо написали на основу знања извода:

$$\left(\frac{1}{2}\sin 2x\right)' = \frac{1}{2}\cos 2x \cdot 2 = \cos 2x$$

и табличног интеграла (1.10). У наставку ове главе дата су решења неких интеграла који се појављују у решавању сложенијих примера. Ови интеграли се сматрају за *интеграле проширене табеле основних интеграла*.

ПРИМЕР: Решити неодређени интеграл:

$$I = \int \sin^2 x \ \mathrm{d}x.$$

Ако искористимо једнакост $\sin^2 2\alpha = \dfrac{1-\cos\alpha}{2}$:

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{1-\cos 2x}{2} \ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int \mathrm{d}x - \int \cos 2x \ \mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{2}\sin 2x\right) + c. \end{aligned}$$

Коначно се добија:

$$I = \int \sin^2 x \ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + c. \tag{1.22}$$

$\square$

На сличан начин се могу израчунати интеграли који као подинтегралну функцију имају $\cos^2 x$, $\sin^4 x$ и $\cos^2 x$. Претходни пример показује да је у решавању интеграла потребно поред извода знати и тригонометрију. Поступак за растав у просте разломке израза:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)\cdot(x+1)} \equiv \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} \tag{1.23}$$

састоји се у препознавању идентички једнаких израза са леве и десне стране. Две рационалне функције су идентички једнаке ако су им идентички једнаки бројиоци и имениоци, следи:

$$\frac{1}{x^2-1} \equiv \frac{A\cdot(x+1)+B\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x+1)} \Rightarrow 1 \equiv x\cdot(A+B)+(A-B)\,.$$

Имениоци су индентички једнаки, док су бројиоци полиноми. Два полинома су идентички једнака ако су им једнаки одговарајући коефицијенти, што најчешће за последицу има добијање система једначина. У наведеном примеру, одговарајући систем једначина је:

$$\begin{array}{ccccc} A & + & B & = & 0 \\ A & - & B & = & 1 \end{array}$$

чија су решења $A = \frac{1}{2}$ и $B = -\frac{1}{2}$. Тада је (1.23) једнако:

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+1}.$$

Размотримо још један интеграл из проширене табеле табличних интеграла.

ПРИМЕР: Решити неодређени интеграл:

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}.$$

Ако се искористи поступак за растав израза (1.23) у просте разломке:

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)\cdot(x+1)} = \int \left(\frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x+1)}\right)\mathrm{d}x$$

и таблични интеграл (1.6) добија се:

$$I = \frac{1}{2}\left(\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x+1}\right) = \frac{1}{2}\Big(\ln|x-1| - \ln|x+1|\Big).$$

Коначно је:

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \cdot \ln \frac{|x-1|}{|x+1|} + c. \tag{1.24}$$

□

Поједини кораци примењени у решавању претходних примера биће посебно објашњени у наредним поглављима.

## 1.3 Смена променљиве

### 1.3.1 Теорема о смени променљиве у неодређеном интегралу

Теорема о смени променљиве у неодређеном интегралу заснована је на изводу сложене функције.

**Теорема 1.2.** Нека је $\varphi(t)$, $t \in (a, b)$, примитивна функција функције $f(t)$ и нека је функција $t = g(x)$ диференцијабилна за $x \in (c, d)$. Тада постоји примитивна функција функције $f(g(x))\, g'(x)$ и при томе важи једнакост:

$$\int f(g(x))\, g'(x)\, \mathrm{d}x = \varphi(g(x)) + c. \tag{1.25}$$

**Доказ.** Ако се нађе извод леве стране једнакости (1.25), добија се:

$$\left( \int f(g(x))\, g'(x)\, \mathrm{d}x \right)' = f(g(x))\, g'(x)$$

што је једнако изводу исте десне стране једнакости (1.25):

$$(\varphi(g(x)) + c)' = \varphi'(g(x))\, g'(x) = f(g(x))\, g'(x)\,.$$

□

У решавању интеграла (1.22) уведена смена:

$$ax = t \Rightarrow a \cdot \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{a}$$

за $a \neq 0$ није ни разматрана. Искористили смо чињеницу да се константа уз $x$ појављује у решењу интеграла као реципрочна вредност. Слично важи за смену:

$$x + b = t \Rightarrow \mathrm{d}x = \mathrm{d}t,$$

одакле следи да додавање константе на $x$ нема утицаја на решење интеграла. Зато се интеграл (1.24) и решавао само на основу извода. Размотримо зато, како уопштена линеарна смена $ax + b = t, a \neq 0$, утиче на решење интеграла:

$$ax + b = t \Rightarrow a \cdot \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{a}.$$

Нека је дат интеграл, такав да се може применити наведена смена:

$$\int f\,(ax + b)\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\int f\,(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\varphi\,(t) + c = \frac{1}{a}\varphi\,(ax + b) + c$$

где је $\varphi\,(x)$ примитивна функција функције $f\,(x)$. Може се закључити да промене у решењу нису посебно велике, јер се целокупно решење множи са $\dfrac{1}{a}$.

ПРИМЕР: Решити неодређени интеграл:

$$I = \int (2x + 1)^2 \mathrm{d}x.$$

Први начин је да се искористи формула за квадрат бинома:

$$I = \int (2x + 1)^2 \mathrm{d}x = \int \left(4x^2 + 4x + 1\right)\mathrm{d}x = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x + c$$

док је други начин да се у $I$ примени смена

$$2x + 1 = t \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{d}t,$$

одакле је:

$$I = \frac{1}{2}\int t^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{6}t^3 + c = \frac{1}{6}\,(2x + 1)^3 + c = \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + x + \frac{1}{6} + c.$$

Интеграл $I$ има на први погледа различита решења. □

Претходни пример показује да је примитивна функција једнака у оба решења, док се константе разликују за $\frac{1}{6}$. Зато се може рећи да константа у (1.1) представља било коју константу – реални број, а не одређену константну вредност. Решење неодређеног интеграла представља *фамилију кривих*, а не тачно одређену криву.

### 1.3.2 Интеграли са тригонометријском сменом

То су интеграли са подинтегралним функцијама облика:

$$\sqrt{1-x^2}, \quad \sqrt{x^2+1}, \quad \sqrt{x^2-1},$$

које су посебно погодне за увођење смена заснованих на основним тригонометријским једнакостима, изведеним из $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, и хиперболичкој једнакости $\mathrm{ch}^2 x-\mathrm{sh}^2 x=1$.
ПРИМЕР: Решити неодређени интеграл:

$$I=\int\sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x.$$

Посматрањем подинтегралне функције и једнакости $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ и $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$, природно је сменити:

$$x=\sin t\Rightarrow \mathrm{d}x=\cos t\ \mathrm{d}t,$$

(како мора бити $1-x^2\geqslant 0$ јер се овај израз налази под кореном, важи $|x|\leqslant 1$ и стога је дефинисано $t=\arcsin x$ за које важи $\sin t=x$). Тада је:

$$I=\int\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot\cos t\ \mathrm{d}t=\int\cos^2 t\ \mathrm{d}t.$$

Добијени интеграл је облика (1.22) и решење је:

$$I=\int\cos^2 t\ \mathrm{d}t=\frac{1}{2}t+\frac{1}{4}\sin 2t+c.$$

Враћајући уведену смену, где је $t=\arcsin x$ добијамо:

$$I=\int\sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x=\frac{1}{2}\arcsin x+\frac{1}{4}\sin\left(2\cdot\arcsin x\right)+c. \tag{1.26}$$

Напоменимо да у општем случају важи $\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{\cos^2 t}=|\cos t|=\pm\cos t$ у зависности од знака вредности $\cos t$. Међутим, како $t=\arcsin x$ као вредност функције arcsin припада интервалу $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ у којем је $\cos t\geqslant 0$, то је последње извођење у потпуности коректно. Иначе, на основу адиционих формула (синус двоструког угла) имамо

$$\frac{1}{4}\sin 2t=\frac{1}{2}\sin t\cos t=\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2},$$

тако да можемо писати и

$$I = \int \sqrt{1-x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\arcsin x + \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + c. \qquad (1.27)$$

$\square$

ПРИМЕР: Решити неодређени интеграл:

$$I = \int \sqrt{x^2+1}\ \mathrm{d}x.$$

Посматрањем подинтегралне функције и из основне једнакости хиперболичких функција природно је сменити:

$$x = \operatorname{sh} t \Rightarrow \mathrm{d}x = \operatorname{ch} t\ \mathrm{d}t,$$

тада је:

$$I = \int \sqrt{\operatorname{sh}^2 t + 1} \cdot \operatorname{ch} t\ \mathrm{d}t = \int \operatorname{ch}^2 t\ \mathrm{d}t.$$

Добијени интеграл се сличо решава као (1.22):

$$I = \int \operatorname{ch}^2 t\ \mathrm{d}t = \int \frac{1+\operatorname{ch} 2t}{2}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\operatorname{sh} 2t + c.$$

Враћајући уведену смену, где је $t = \operatorname{arsh} x$ добијамо:

$$I = \int \sqrt{x^2+1}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\operatorname{arsh} x + \frac{1}{4}\operatorname{sh}(2\operatorname{arsh} x) + c. \qquad (1.28)$$

$\square$

Решење може да се запише и на други начин, како је

$$\operatorname{arsh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

затим на основу:

$$\operatorname{sh} 2t = 2\cdot\operatorname{sh} t\cdot\operatorname{ch} t = 2x\sqrt{x^2+1} \qquad \left(\operatorname{ch} t = \sqrt{\operatorname{sh}^2 t + 1} = \sqrt{x^2+1}\right),$$

следи

$$I = \int \sqrt{x^2+1}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) + \frac{1}{2}x\sqrt{x^2+1} + c. \qquad (1.29)$$

ПРИМЕР: Решити неодређени интеграл:

$$I = \int \sqrt{x^2 - 1}\, \mathrm{d}x.$$

Посматрањем подинтегралне функције природно је увести смену:

$$x = \pm \operatorname{ch} t \Rightarrow \mathrm{d}x = \pm \operatorname{sh} t \ \mathrm{d}t$$

(како мора бити $x^2 - 1 \geqslant 0$ јер се овај израз налази под кореном, важи $|x| \geqslant 1$ и стога је дефинисано $t = \operatorname{arch}|x|$ за које важи $\operatorname{ch} t = |x|$, $x = \pm \operatorname{ch} t$ у зависности од знака вредности $x$ ). Тада је:

$$I = \int \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} \cdot (\pm \operatorname{sh} t \ \mathrm{d}t) = \int (\pm \operatorname{sh} t \ \mathrm{d}t) \cdot (\pm \operatorname{sh} t \ \mathrm{d}t) = \int \operatorname{sh}^2 t \ \mathrm{d}t.$$

Добијени интеграл се слично решава као тригонометријски:

$$I = \int \operatorname{sh}^2 t \ \mathrm{d}t = \int \frac{\operatorname{ch} 2t - 1}{2} \ \mathrm{d}t = \frac{1}{4} \operatorname{sh} 2t - \frac{1}{2}\, t + c.$$

Враћајући уведену смену, где је $t = \operatorname{arch} x$ добијамо:

$$I = \int \sqrt{x^2 - 1}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{4} \operatorname{sh}(2 \operatorname{arch} x) - \frac{1}{2} \operatorname{arch} x + c. \tag{1.30}$$

□

Како је $\operatorname{arch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ и као у претходном случају имамо

$$\operatorname{sh} 2t = 2 \cdot \operatorname{ch} t \cdot \operatorname{sh} t = 2x\sqrt{x^2 - 1} \quad \left(\operatorname{sh} t = \sqrt{\operatorname{ch}^2 t - 1} = \sqrt{x^2 - 1}\right),$$

приметимо да се решење може записати и у облику:

$$I = \int \sqrt{x^2 - 1}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2 - 1} - \frac{1}{2} \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) + c. \tag{1.31}$$

Природно је размотрити решавање општијег интеграла[1]:

$$\int \sqrt{x^2 + ax + b}\ \mathrm{d}x. \tag{1.32}$$

[1] Најопштије је посматрати подкорени израз облика $px^2 + qx + r$, који постаје $p\left(x^2 + \frac{q}{p}x + \frac{r}{p}\right)$, следи да је довољно посматрати подкорени израз $x^2 + ax + b$.

Подинтегрална функција може, намештањем поткорене величине на потпуни квадрат, да се запише на следећи начин:

$$\begin{aligned} I &= \int \sqrt{x^2 + 2\cdot\frac{a}{2}\cdot x + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \sqrt{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b}\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Неопходно је одредити знак сабирка под кореном подинтегралне функције:

$$-\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b.$$

Јасно је да све зависи од знака поменутог сабирка јер последњи интеграл своди на један од интеграла (1.28)–(1.30).

### 1.3.3 Задаци

Прва два примера се решавају директно на основу знања таблице интеграла (иако на први поглед можда делују компликованије). Напоменимо да се за све примере до краја главе подразумева да се раде тамо где то има смисла, у првом примеру за $x > 0$.

**Задатак 1.1** Решити интеграл:

$$I = \int \frac{(\sqrt{x}-1)^2}{\sqrt[5]{x}}\mathrm{d}x.$$

**Решење:**

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x - 2x^{\frac{1}{2}} + 1}{x^{\frac{1}{5}}}\,\mathrm{d}x = \int \left(x^{\frac{4}{5}} - 2x^{\frac{3}{10}} + x^{-\frac{1}{5}}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{x^{\frac{9}{5}}}{\frac{9}{5}} - 2\frac{x^{\frac{13}{10}}}{\frac{13}{10}} + \frac{x^{\frac{4}{5}}}{\frac{4}{5}} + c. \end{aligned}$$

Коначно:

$$I = \frac{5}{9}x^{\frac{9}{5}} - \frac{20}{13}x^{\frac{13}{10}} + \frac{5}{4}x^{\frac{4}{5}} + c. \qquad \square$$

**Задатак 1.2** Решити интеграл:

$$I = \int \frac{2^x + 3^x}{6^x}\ \mathrm{d}x.$$

**Решење:**

$$\begin{aligned} I = \int \frac{2^x}{6^x}\ \mathrm{d}x + \int \frac{3^x}{6^x}\ \mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{3}\right)^x \mathrm{d}x + \int \left(\frac{1}{2}\right)^x \mathrm{d}x \\ &= \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^x}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)} + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^x}{\ln\left(\frac{1}{2}\right)} + c. \end{aligned}$$

Коначно:

$$I = -3^{-x}\ln 3 - 2^{-x}\ln 2 + c.$$

$\square$

**Задатак 1.3** Решити интеграл:

$$I = \int \cos^2 x\ \mathrm{d}x.$$

**Решење:** Искористимо $\cos^2 x = \dfrac{1+\cos 2x}{2}$:

$$\begin{aligned} I = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\ \mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\left(\int \mathrm{d}x + \int \cos 2x\ \mathrm{d}x\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\sin 2x\right) + c. \end{aligned}$$

Коначно се добија:

$$I = \int \cos^2 x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c. \tag{1.33}$$

$\square$

**Задатак 1.4** Решити интеграл:

$$I = \int \sin^4 x \ \mathrm{d}x.$$

**Решење:**

$$\begin{aligned}
\int \sin^4 x \ \mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2 \mathrm{d}x \\
&= \int \frac{1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x}{4} \ \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\int \ \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \cos 2x \ \mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int \cos^2 2x \ \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Уведимо смену:

$$2x = t \Rightarrow 2\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{2}$$

након смене у другом интегралу и примене резултата (1.33) за трећи интеграл добија се:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{4}\int \mathrm{d}x - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \cos t \ \mathrm{d}t + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int \cos^2 t \ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin t + \frac{1}{8}\int \cos^2 t \ \mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}\sin t + \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t\right).
\end{aligned}$$

После враћања уведене смене коначно се добија:

$$I = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c. \tag{1.34}$$

□

**Задатак 1.5** Извести $\int a^x \mathrm{d}x$ за $a \in (0,1)\cup(1,+\infty)$ користећи $\int e^x \mathrm{d}x$.

**Решење:** Како је $a \in (0,1)\cup(1,+\infty)$ то је могуће написати $a^x = e^{x\ln a}$ одакле је:

$$I = \int a^x \mathrm{d}x = \int e^{x\cdot\ln a}\mathrm{d}x.$$

Увођењем смене:

$$x \ln a = t \Rightarrow \ln a \ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{\ln a}$$

добијамо:

$$I = \frac{1}{\ln a} \int e^t \mathrm{d}t = \frac{1}{\ln a} e^t + c = \frac{1}{\ln a} e^{x \cdot \ln a} + c = \frac{1}{\ln a} a^x + c.$$

$\square$

**Задатак 1.6** Решити интеграл:

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2x-3}}.$$

**Решење:** Ако се уведе линеарна смена:

$$2x - 3 = t \Rightarrow 2 \ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \Rightarrow \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{2}$$

интеграл се своди на таблични. Решење је могуће одмах написати, ако се добро познају таблични интеграли.

$$I = \sqrt{2x-3} + c.$$

У суштини је урађено следеће:

$$I = \int \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{\mathrm{d}t}{2} = \int \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \ \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{2x-3} + c.$$

$\square$

**Задатак 1.7** Решити интеграл:

$$I = \int \cos^2 \left( \frac{\pi - 2\alpha}{3} \right) d\alpha.$$

**Решење:** Ако се уведе линеарна смена:

$$\frac{\pi-2\alpha}{3}=\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}\alpha=t\Rightarrow -\frac{2}{3}d\alpha=\mathrm{d}t\Rightarrow d\alpha=-\frac{3}{2}\ \mathrm{d}t$$

интеграл се своди на познати интеграл (1.33). Решење је могуће одмах написати:

$$\begin{aligned}I &= -\frac{3}{2}\cdot\left[\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{4}\sin\left(-\frac{4}{3}\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)\right]+c\\ &= \frac{1}{2}\alpha-\frac{\pi}{4}-\frac{3}{8}\sin\left(-\frac{4}{3}\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)+c,\end{aligned}$$

при чему нам $\frac{\pi}{4}$ у последњем изразу ни не треба с обзиром на то да представља константну вредност. У суштини је урађено следеће:

$$\begin{aligned}-\frac{3}{2}\int\cos^2 t\ \mathrm{d}t &= -\frac{3}{2}\left(\frac{t}{2}+\frac{1}{4}\sin 2t\right)+c\\ &= -\frac{3}{2}\left(\frac{-\frac{2}{3}\alpha+\frac{\pi}{3}}{2}+\frac{1}{4}\sin\left(-\frac{4}{3}\alpha+\frac{2\pi}{3}\right)\right)+c.\end{aligned}$$

□

**Задатак 1.8** Решити интеграл:

$$I=\int x\cdot e^{1-\frac{x^2}{5}}\ \mathrm{d}x.$$

**Решење:** Сменом

$$1-\frac{x^2}{5}=t\Rightarrow -\frac{2x}{5}\mathrm{d}x=\mathrm{d}t\Rightarrow x\mathrm{d}x=-\frac{5}{2}\mathrm{d}t$$

дати интеграл се своди на:

$$I=-\frac{5}{2}\int e^t\ \mathrm{d}t=-\frac{5}{2}e^t+c=-\frac{5}{2}e^{1-\frac{x^2}{5}}+c.$$

□