Miodrag M. Spalević
Ivan D. Aranđelović
Aleksandar V. Pejčev
Dragan J. Doder
Dušan Lj. Đukić
Jelena D. Tomanović

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ

DIFERENCIJALNE JEDNAČINE

prof. dr Miodrag M. Spalević
prof. dr Ivan D. Arandjelović
dr Aleksandar V. Pejčev
Dušan Lj. Djukić
Jelena D. Tomanović

Univerzitet u Beogradu
Mašinski fakultet
Katedra za Matematiku
Beograd, 2015. godine

Dr Miodrag M. Spalević, redovni profesor
Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu

Dr Ivan D. Arandjelović, vanredni profesor
Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu

Dr Aleksandar V. Pejčev, docent
Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu

Dušan Lj. Djukić, asistent
Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu

Jelena D. Tomanović, asistent
Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu

Diferencijalne jednačine
Osnovni udžbenik

I izdanje

Recenzenti:
Dr Boško Jovanović, redovni profesor (u penziji)
Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu
Dr Stojan Radenović, redovni profesor (u penziji)
Mašinski fakultet, Univerzitet u Beogradu

Izdavač:
Univerzitet u Beogradu, Mašinski fakultet
Kraljice Marije 16, 11120 Beograd 35, Srbija
Za izdavača:
Dekan dr Milorad Milovančević, redovni profesor
Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu
Glavni i odgovorni urednik:
??? Dr Aleksandar Obradović, redovni profesor
Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu

Odobreno za štampu:
Odlukom Dekana Mašinskog fakulteta ??? godine

Beograd 2015. godine
Tiraž: 1000 primeraka

Štampa: Planeta print
YU ISBN ????

Predgovor

Knjiga **Diferencijalne jednačine** je namenjena studentima 1. i 2. godine Mašinskog fakulteta u Beogradu. Zapravo, deo materije knjige se odnosi na predmet Matematika 2, koji studenti Mašinskog fakulteta u Beogradu slušaju u 2. semestru osnovnih akademskih studija, gde se obradjuju diferencijalne jednačine 1. reda, a deo materije knjige se odnosi na predmet Matematika 3, koji studenti Mašinskog fakulteta u Beogradu slušaju u 3. semestru osnovnih akademskih studija, gde se obradjuju diferencijalne jednačine višeg reda i sistemi diferencijalnih jednačina. Naravno, knjiga može biti od koristi svima koji se interesuju za ovu problematiku.

Na kraju svakog poglavlja postoje odeljci u kojima su dati zadaci sa rešenjima, a odnose se na problematiku koja se obradjuje u datom poglavlju.

Beograd, 10.07.2015. godine Autori

Sadržaj

1 Obične diferencijalne jednačine prvog reda **1**

1.1 Osnovni pojmovi . . . 1
1.2 Diferencijalne jednačine u kojima se ne pojavljuje nepoznata funkcija . 4
1.3 Diferencijalne jednačine kod kojih se promenljive mogu razdvojiti . . . 5
1.4 Homogene diferencijalne jednačine . . . 6
1.5 Linearna diferencijalna jednačina . . . 8
1.6 Bernulijeva diferencijalna jednačina . . . 9
1.7 Diferencijalna jednačina u obliku totalnog diferencijala . . . 9
1.8 Integracioni množilac . . . 10
1.9 Ortogonalne i izogonalne trajektorije . . . 12
1.10 Zadaci . . . 13
1.10.1 Formiranje diferencijalnih jednačina . . . 13
1.10.2 Diferencijalne jednačine kod kojih se promenljive mogu razdvojiti 16
1.10.3 Homogene diferencijalne jednačine . . . 25
1.10.4 Linearna diferencijalna jednačina . . . 38
1.10.5 Bernulijeva diferencijalna jednačina . . . 41
1.10.6 Diferencijalna jednačina u obliku totalnog diferencijala . . . 44
1.10.7 Integracioni množilac . . . 48
1.10.8 Ortogonalne i izogonalne trajektorije . . . 55

2 Diferencijalne jednačine višeg reda **63**

2.1 Osnovni pojmovi . . . 63
2.2 Snižavanje reda diferencijalne jednačine . . . 65
2.2.1 Jednačina koja ne sadrži nepoznatu funkciju y . . . 65
2.2.2 Diferencijalna jednačina drugog reda koja ne sadrži nezavisnu promenljivu x . . . 65
2.3 Linearne diferencijalne jednačine višeg reda . . . 65
2.3.1 Osnovni pojmovi . . . 65
2.3.2 Linearna nezavisnost konačnog skupa funkcija . . . 67
2.3.3 Opšte rešenje homogene linearne diferencijalne jednačine . . . 69
2.3.4 Homogena linearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima . . . 70
2.3.5 Opšte rešenje linearne diferencijalne jednačine . . . 70
2.3.6 Metod neodređenih koeficijenata . . . 71
2.3.7 Lagranžev metod varijacije konstanti . . . 71
2.3.8 Ojlerova diferencijalna jednačina . . . 72
2.4 Zadaci . . . 72

2.4.1 Formiranje diferencijalnih jednačina višeg reda 72
2.4.2 Snižavanje reda diferencijalne jednačine 73
2.4.3 Linearna nezavisnost konačnog skupa funkcija 86
2.4.4 Opšte rešenje homogene linearne diferencijalne jednačine 88
2.4.5 Homogena linearna diferencijalna jednačina sa konstantnim koeficijentima 93
2.4.6 Metod neodređenih koeficijenata 95
2.4.7 Lagranžev metod varijacije konstante 114
2.4.8 Ojlerova diferencijalna jednačina 120

3 Sistemi diferencijalnih jednačina 129
3.1 Osnovni pojmovi 129
3.2 Metod diferenciranja i eliminacije 130
3.3 Sistemi zapisani u simetričnom obliku 131
3.4 Zadaci 133
3.4.1 Metod diferenciranja i eliminacije 133
3.4.2 Sistemi zapisani u simetričnom obliku 144

Glava 1

Obične diferencijalne jednačine prvog reda

1.1 Osnovni pojmovi

Definicija 1.1 *Neka su $I, J_1, J_2 \subseteq \mathbb{R}$ proizvoljni neprazni intervali. Jednačina oblika*

$$F(x, y, y') = 0, \qquad y = y(x),\ y' = y'(x), \tag{1.1}$$

gde je:
- $F : I \times J_1 \times J_2 \to \mathbb{R}$ zadata funkcija (izraz) tri argumenta;
- $x \in I$ nezavisna promenljiva;
- $y = y(x) : I \to J_1$ nepoznata diferencijabilna funkcija argumenta x;
- $y' = y'(x) = \dfrac{dy}{dx} : I \to J_2$ izvod nepoznate funkcije y po argumentu x,
naziva se obična diferencijalna jednačina prvog reda.

Nadalje ćemo (1.1) zapisivati

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1.2}$$

podrazumevajući da je $y = y(x)$ i $y' = y'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

U ovoj glavi ćemo koristiti termin **diferencijalna jednačina** umesto *obična diferencijalna jednačina prvog reda*, zato što druge vrste diferencijalnih jednačina nećemo razmatrati. Postupak odredjivanja nepoznate funkcije iz date diferencijalne jednačine naziva se rešavanje te jednačine ili integraljenje te jednačine. Rešenje (koristi se i termin integral) diferencijalne jednačine je proizvoljna diferencijabilna funkcija y koja identički zadovoljava jednačinu (1.1). Grafik rešenja diferencijalne jednačine naziva se integralna kriva. Termin "rešenje diferencijalne jednačine prvog reda" preciznije opisuje naredna definicija.

Definicija 1.2 *Rešiti diferencijalnu jednačinu (1.1) znači izvesti algebarsku vezu izmedju x i y u kojoj ne konfigurišu izvodi, što podrazumeva jednu od sledeće tri varijante:*

1. *$y = g(x, C)$, odnosno rešenje u eksplicitnom obliku;*

1.6 Bernulijeva diferencijalna jednačina

Diferencijalna jednačina

$$y' + p(x)\, y = q(x)\, y^k \quad (k \in \mathbb{R}), \quad y = y(x) \tag{1.27}$$

naziva se Bernulijeva diferencijalna jednačina. Ako je $k = 0$, jednačina (1.27) je linearna, a ako je $k = 1$, u njoj se promenljive mogu razdvojiti. Stoga ćemo pretpostaviti da je $k \neq 0$ i $k \neq 1$. Uvedimo smenu $y(x) = (u(x))^m$, gde je u nova nepoznata funkcija argumenta x, a m je konstanta koju treba odrediti. Dobijamo $y' = mu^{m-1}u'$, te jednačina (1.27) postaje

$$mu^{m-1}u' + p(x)\, u^m = q(x)\, u^{mk},$$

$$\text{to jest, } u' + \frac{1}{m} p(x)\, u = \frac{1}{m} q(x)\, u^{mk-m+1}. \tag{1.28}$$

Izaberimo m tako da bude

$$mk - m + 1 = 0,$$

to jest $m = \frac{1}{1-k}$. Na taj način dobijamo rezultat: Bernulijeva diferencijalna jednačina (1.27) svodi se pomoću smene

$$y = u^{\frac{1}{1-k}}$$

na linearnu diferencijalnu jednačinu

$$u' + (1-k)\, p(x)\, u = (1-k)\, q(x)\,.$$

Kako je ova jednačina linearna, ona se može rešiti primenom formule (1.26). Na taj način se dobija

$$y^{1-k} = e^{-(1-k)\int p(x)dx} \left(C + \int (1-k)\, q(x)\, e^{(1-k)\int p(x)dx} dx \right).$$

Ovo je formula za rešavanje Bernulijeve jednačine (1.27).

1.7 Diferencijalna jednačina u obliku totalnog diferencijala

Jednačina

$$P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy = 0 \tag{1.29}$$

je diferencijalna jednačina u obliku totalnog diferencijala ako je leva strana totalni diferencijal neke funkcije $u(x,y)$ dveju nezavisno promenljivih x i y, tj.

$$P(x,y)\, dx + Q(x,y)\, dy = du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$

Ako je tako, onda je $u(x,y) = C$ opšte rešenje jednačine (1.29).

Zadatak 1.26 $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$.

Rešenje. Ako zadatu jednačinu zapišemo u obliku

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2},$$

onda se uočava da je zadata jednačina homogena. Za njeno rešavanje treba uvesti smenu

$$y = xz, \quad y' = xz' + z,$$

čijom primenom dobijamo

$$xz' = \sqrt{1 - z^2}.$$

Opšti integral poslednje jednačine je

$$\arcsin z = \ln Cx,$$

a njeno opšte rešenje:

$$z = \sin(\ln Cx).$$

Opšte rešenje polazne jednačine je

$$y = x\,\sin(\ln Cx).$$

□

Zadatak 1.27 $(x^2 + 2xy - y^2)dx + (y^2 + 2xy - x^2)dy = 0$

Rešenje. Ako zadatu jednačinu zapišemo u obliku

$$\left[1 + 2\,\frac{y}{x} - \left(\frac{y}{x}\right)^2\right] dx + \left[\left(\frac{y}{x}\right)^2 + 2\,\frac{y}{x} - 1\right] dy = 0,$$

onda se uočava da je ona homogena. Za njeno rešavanje treba uvesti smenu

$$y = xz, \quad dy = x\,dz + z\,dx,$$

čijom primenom dobijamo

$$(1 + 2z - z^2)dx + (z^2 + 2z - 1)(x\,dz + z\,dx) = 0,$$

odnosno

$$\frac{dx}{x} + \frac{z^2 + 2z - 1}{z^3 + z^2 + z + 1}\,dz = 0.$$

Odavde dobijamo

$$\frac{dx}{x} + \left(\frac{2z}{z^2 + 1} - \frac{1}{z + 1}\right) dz = 0,$$

odakle sledi

$$x(z^2 + 1) - C(z + 1) = 0.$$

pa ćemo dobiti

$$\frac{(z^3+3z)\,dz}{z^4+3z^2+2}+\frac{dx}{x}=0, \quad \text{ili} \quad \left(\frac{2z}{z^2+1}-\frac{z}{z^2+2}\right)dz+\frac{dx}{x}=0.$$

Opšti integral poslednje jednačine je

$$(z^2+1)^2x^2=b(z^2+2),$$

a opšti integral jednačine (1.63), prema (1.64),

$$(x^2+y^2)^2=b^2(2x^2+y^2)$$

je ujedno jednačina traženih ortogonalnih trajektorija. □

Zadatak 1.75 Familije elipsi $x^2+3y^2=ay$. Zatim odrediti onu ortogonalnu trajektoriju koja sadrži tačku (1,2).

Rešenje. Zapišimo jednačinu date familije u obliku

$$\frac{x^2}{y}+3y=a,$$

a zatim diferencirajmo dobijenu jednakost po x, pa ćemo dobiti

$$\frac{2xy-x^2y'}{y^2}+3y'=0, \quad \text{ili} \quad 2xy+(3y^2-x^2)y'=0.$$

Odavde dobijamo diferencijalnu jednačinu ortogonalnih trajektorija

$$2xyy'-(3y^2-x^2)=0. \tag{1.65}$$

Za rešavanje jednačine (1.77) uvedimo smenu

$$y=xz, \quad y'=z+xz', \tag{1.66}$$

pa ćemo dobiti

$$2x^2z(z+xz')-(3x^2z^2-x^2)=0, \quad \text{ili} \quad \frac{2zdz}{z^2-1}+\frac{dx}{x}=0,$$

a odavde

$$z^2=Cx+1.$$

Opšte rešenje jednačine (1.65) je

$$y^2=x^2(Cx+1). \tag{1.67}$$

Ako uvrstimo koordinate tačke $(1,2)$ u (1.67), dobićemo $C=3$, odnosno

$$y^2=x^2(3x+1).$$

čije je rešenje

$$z^2 = y^2 + \frac{1}{y^2} + 2C_1, \quad \text{ili} \quad z^2 = \frac{(y^2 + C_1)^2 + 1 - C_1^2}{y^2}.$$

Iz poslednje jednačine dobijamo

$$z = \pm\frac{\sqrt{(y^2 + C_1)^2 + 1 - C_1^2}}{y},$$

a odatle

$$y' = \pm\frac{\sqrt{(y^2 + C_1)^2 + 1 - C_1^2}}{y}, \quad \text{odnosno} \quad \pm\frac{d(y^2 + C_1)}{\sqrt{(y^2 + C_1)^2 + 1 - C_1^2}} = 2dx.$$

Opšti integral poslednje jednačine:

$$\ln\left|y^2 + C_1 + \sqrt{y^4 + 2C_1y^2 + 1}\right| = \pm 2x + C_2$$

je istovremeno i opšti integral polazne jednačine, tj.

$$\left(\ln\left|y^2 + C_1 + \sqrt{y^4 + 2C_1y^2 + 1}\right| + 2x - C_2\right)\left(\ln\left|y^2 + C_1 + \sqrt{y^4 + 2C_1y^2 + 1}\right| - 2x - C_2\right) = 0.$$

□

Zadatak 2.15 Odrediti opšte rešenje diferencijalne jednačine 2. reda

$$2yy'' - 3y'^2 = 4y^2.$$

Rešenje. Nakon smene iz prethodnog zadatka jednačina postaje

$$2yzz' - 3z^2 = 4y^2,$$

gde je pametno uvesti smenu $t = z^2$, jer je onda

$$yt' - 3t = 4y^2, \quad t' - \frac{3}{y}t = 4y, \quad t = t(y),$$

što predstavlja Bernulijevu diferencijalnu jednačinu. Opšte rešenje ove jednačine je

$$t = C_1y^3 - 4y^2, \quad \text{odnosno} \quad y' = \pm\sqrt{C_1y^3 - 4y^2},$$

odakle sledi

$$\int \frac{dy}{\sqrt{C_1y^3 - 4y^2}} = x + C_2, \quad \pm\arctan\frac{\sqrt{C_1y - 4}}{2} = x + C_2.$$

□

odnosno $A = 2,\ B = 0,\ C = -3,\ D = 0$. Imamo

$$z = z_h + z_p = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x + 2x^3 - 3x$$

i konačno

$$y = \int z\,dx = -\frac{1}{2}C_1 \cos 2x + \frac{1}{2}C_2 \sin 2x + \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{2}x^2 + C_3.$$

□

Zadatak 2.56 $\qquad y''' - 5y'' + 8y' - 4y = e^{2x}.$

Rešenje. Karakteristična jednačina odgovarajuće homogene jednačine

$$t^3 - 5t^2 + 8t - 4 = 0$$

ima korene $t_{1,2} = 2,\ t_3 = 1$. Ovim korenima odgovara fundamentalni sistem rešenja $e^{2x},\ xe^{2x},\ e^x$. Opšte rešenje odgovarajuće homogene jednačine je

$$y_h = C_1 e^x + (C_2 + C_3 x)e^{2x}.$$

Pošto je broj 2 koren karakteristične jednačine reda dva, partikularno rešenje zadate jednačine tražimo u obliku

$$y_p = \frac{1}{\varphi''(2)}\, x^2 e^{2x}.$$

Ovde je $\varphi(t) = t^3 - 5t^2 + 8t - 4,\ \varphi''(t) = 6t - 10$ i $\varphi''(2) = 2$, pa dobijamo da je

$$y_p = \frac{1}{2}\, x^2 e^{2x}.$$

Prema tome, opšte rešenje zadate jednačine glasi

$$y = C_1 e^x + (C_2 + C_3 x)e^{2x} + \frac{1}{2}\, x^2 e^{2x}.$$

□

Zadatak 2.57 $\qquad y''' + y'' + y' + y = x^2 + \sin^2(x).$

Rešenje. Karakteristična jednačina odgovarajuće homogene jednačine

$$t^3 + t^2 + t + 1 = 0$$

ima korene $t_{1,2} = \pm i,\ t_3 = -1$. Ovim korenima odgovara fundamentalni sistem rešenja $e^{-x}, \cos x,\ \sin x$. Opšte reš enje odgovarajuće homogene jednač ine je

$$y_h = C_1 e^{-x} + C_2 \cos(x) + C_3 \sin(x).$$

dobićemo

$$y = -\frac{1}{10}(19\ddot{x} + 6\dot{x} + 7x),$$
$$z = \frac{1}{5}(4\ddot{x} + \dot{x} + 7x). \tag{3.28}$$

Ako uvrstimo y i z iz (3.28) u (3.27), dobićemo

$$\dddot{x} + \ddot{x} + \dot{x} + x = 0.$$

Karakteristična jednačina jednačine (3.29) $t^3 + t^2 + t + 1 = 0$ ima korene $t_1 = -1$, $t_{2,3} = \pm i$. Stoga je je njeno opšte rešenje:

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 \cos t + C_3 \sin t. \tag{3.29}$$

Iz (3.29), diferenciranjem po t, dobijamo

$$\dot{x} = -C_1 e^{-t} - C_2 \sin t + C_3 \cos t, \qquad \ddot{x} = C_1 e^{-t} - C_2 \cos t - C_3 \sin t, \tag{3.30}$$

a zamenom (3.29) i (3.30) u (3.28)

$$y = -2C_1 e^{-t} + \frac{6C_2 - 3C_3}{5} \cos t + \frac{6C_3 + 3C_2}{5} \sin t,$$
$$z = 2C_1 e^{-t} + \frac{3C_2 + C_3}{5} \cos t + \frac{3C_3 - C_2}{5} \sin t. \tag{3.31}$$

Opšte rešenje zadatog sistema je dato sa (3.29) i (3.31). □

Zadatak 3.10 Odrediti ono partikularno rešenje sistema diferencijalnih jednačina

$$\begin{array}{llll} \dot{x} & = 3x & -y & +z \\ \dot{y} & = -x & +5y & -z \\ \dot{z} & = x & -y & +3z \end{array}$$

koje ispunjava uslove $x(0) = -2$, $y(0) = 2$, $z(0) = 0$.

Rešenje. Diferenciranjem prve jednačine datog sistema dobijamo

$$\ddot{x} = 3\dot{x} - \dot{y} + \dot{z}.$$

Ako u prethodni izraz uvrstimo $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$

$$\ddot{x} = 11x - 9y + 7z,$$

diferenciranje pretdodnog izraza daje

$$\dddot{x} = 11\dot{x} - 9\dot{y} + 7\dot{z},$$

odakle je (nakon uvrshtavanja vrednosti $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ iz datog sistema)

$$\dddot{x} = 49x - 63y + 41z.$$