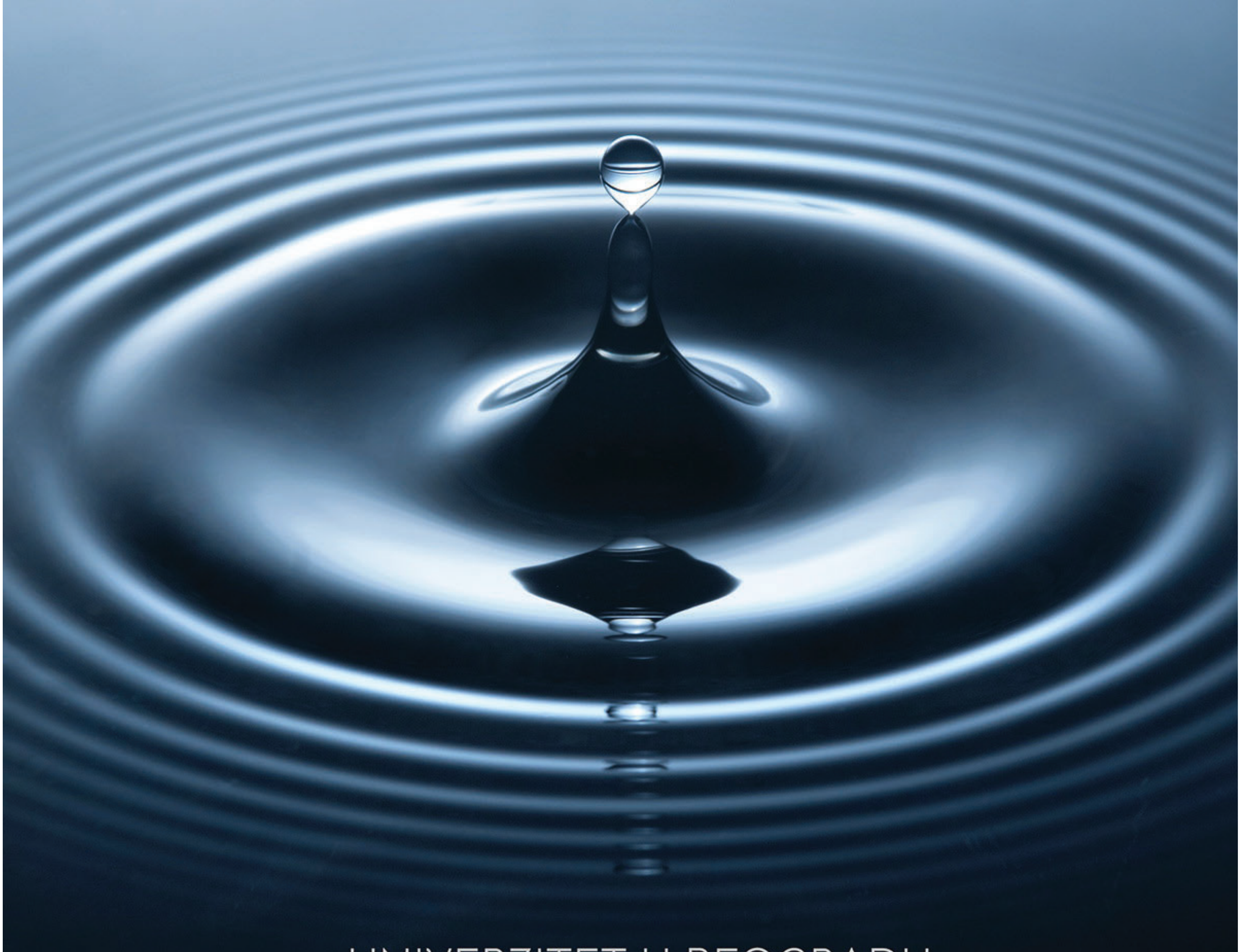
Vera Pavlović, Jelena Ilić, Jasmina Jovanović,
Aleksandra Vasić-Milovanović, Zoran Trifković

PREDAVANJA IZ FIZIKE



UNIVERZITET U BEOGRADU
MAŠINSKI FAKULTET

Vera Pavlović, Jelena Ilić, Jasmina Jovanović,
Aleksandra Vasić-Milovanović, Zoran Trifković

PREDAVANJA
IZ
FIZIKE

UNIVERZITET U BEOGRADU
MAŠINSKI FAKULTET

Beograd, 2021.

PREDAVANJA IZ FIZIKE

Prvo izdanje

- **Autori:**
  Prof. dr Vera Pavlović, vanredni profesor, Univerzitet u Beogradu – Mašinski fakultet
  Prof. dr Jelena Ilić, redovni profesor, Univerzitet u Beogradu – Mašinski fakultet
  Prof. dr Jasmina Jovanović, redovni profesor, Univerzitet u Beogradu – Mašinski fakultet
  Prof. dr Aleksandra Vasić-Milovanović, redovni profesor, Univerzitet u Beogradu – Mašinski fakultet
  Prof. dr Zoran Trifković, redovni profesor, Univerzitet u Beogradu – Mašinski fakultet

- **Recenzenti:**
  Prof. dr Goran Poparić, redovni profesor, Univerzitet u Beogradu, Fizički fakultet
  Prof. dr Bećko Kasalica, redovni profesor, Univerzitet u Beogradu, Fizički fakultet

- **Izdavač:**
  Univerzitet u Beogradu - Mašinski fakultet, Kraljice Marije 16, 11120 Beograd 35, Srbija
  tel. (+381 11) 3302-200, faks 3370-364, http://www.mas.bg.ac.rs/

- **Za izdavača**:
  Prof. dr Radivoje Mitrović, dekan, redovni profesor, Univerzitet u Beogradu – Mašinski fakultet

- **Urednik:**
  Prof. dr Milan R. Lečić, redovni profesor, Predsednik Komisije za izdavačku delatnost,
  Univerzitet u Beogradu – Mašinski fakultet

- **Štampanje odobrila:**
  Komisija za izdavačku delatnost Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu i Dekan Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu, odlukom br. 20/2021 od 9. 7. 2021. godine.

- **Štampa:**
  PLANETA PRINT d.o.o., Igora Vasiljeva 33r, 11000 Beograd
  tel./faks (+381 11) 6506-564

- **Kompjuterski slog i grafička obrada:**
  Autori

- **Dizajn korica**: Predrag Mladenović

- **Tiraž:** 800 primeraka
  ISBN 978-86-6060-084-6

PREDGOVOR

Ovaj udžbenik je namenjen prvenstveno studentima prve godine Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu, koji u okviru obaveznih predmeta prate nastavu iz oblasti fizike, kako na studijskom programu *OAS - Mašinsko inženjerstvo*, tako i na studijskom programu *OAS - Informacione tehnologije u mašinstvu*.

Zajedno sa pomoćnim udžbenicima pod nazivom *Zbirka rešenih ispitnih zadataka iz fizike* i *Praktikum laboratorijskih vežbi iz fizike i merenja*, štampanim takođe u izdanju Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu, ovaj udžbenik čini celovitu literaturnu podršku studentima u praćenju nastave iz predmeta *Fizika i merenja*. Takođe pokriva i oblasti fizike koje su predviđene nastavnim planom i programom na prvoj godini studijskog programa *OAS - Informacione tehnologije u mašinstvu*.

Pored toga, ova knjiga je namenjena i svim drugim studentima kojima su znanja iz oblasti fizike potrebna kao teorijska osnova za razumevanje sadržaja ostalih predmeta na različitim nivoima akademskih studija.

Srdačno se zahvaljujemo recenzentima na angažovanju i sugestijama pri pregledu teksta udžbenika. Unapred se zahvaljujemo i studentima, kao i svim drugim čitaocima, na sugestijama, predlozima i novim idejama.

Autori

SADRŽAJ

I – UVOD

II – OSNOVE KINEMATIKE MATERIJALNE TAČKE

III – SILA I NJUTNOVI ZAKONI. ZAKON ODRŽANJA IMPULSA

IV – RAD I ENERGIJA U MEHANICI. ZAKON ODRŽANJA ENERGIJE

V – OSNOVE DINAMIKE KRUŽNOG KRETANJA MATERIJALNE TAČKE I ROTACIONOG KRETANJA KRUTOG TELA

IX – TOPLOTNE POJAVE. OSNOVE TERMODINAMIKE

X – MEHANIČKI TALASI

XI – ELEKTROMAGNETNI TALASI

XII – OSNOVNE POSTAVKE KVANTNE I ATOMSKE FIZIKE

XIII LITERATURA 281

ČETVRTA GLAVA

RAD I ENERGIJA U MEHANICI. ZAKON ODRŽANJA ENERGIJE

1. RAD U MEHANICI

Ako dejstvo neke sile $\vec{F}$ utiče na pomeranje, tj. na kretanje datog tela, usled postojanja komponente sile duž *pravca* kretanja, kažemo da ta sila vrši rad tokom pomenutog kretanja. Zavisno od toga da li data sila: 1) uzrokuje i podstiče kretanje tela (ima komponentu čiji je *smer* paralelan smeru pomeranja tela), ili 2) ometa postojeće kretanje tela (ima komponentu čiji je *smer* suprotan od smera pomeranja tela) — rad date sile može imati pozitivnu ili negativnu vrednost.

1.1. Rad konstantne i promenljive sile

☼ **Primer 1 – Slučaj pravolinijskog kretanja tela pod dejstvom konstantne sile ($\vec{F} = const$).**

U slučaju pravolinijskog kretanja tela pod dejstvom sile koja je konstantna kao vektor (intenzitet, pravac i smer sile su konstantni), učinak sile, tj. rad koji sila izvrši, određuje se skalarnim proizvodom vektora sile ($\vec{F}$) i vektora pomeraja tela:

$$\boxed{A = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = F\ \Delta r\ \cos\left(\angle\left(\vec{F},\Delta\vec{r}\right)\right) = F\ \Delta r\ \cos\theta}, \tag{1}$$

gde je θ ugao između pravca vektora sile i pravca vektora pomeraja (slika 1).

Navedeni slučaj ($\vec{F} = const$) podrazumeva da se telo kreće pravolinijski u jednom smeru, pa važi: $\left|\Delta\vec{r}\right| = s$, gde je s – put koji telo pređe tokom dejstva sile $\vec{F} = const$. Zato je u jednom delu udžbeničke literature (naročito u literaturi za tehničke fakultete) prihvaćeno da se vektor pomeraja u tom slučaju može označiti i kao $\vec{s}$, pa se onda za rad može pisati i:

$$\boxed{A = \vec{F}\cdot\vec{s} = F\ s\ \cos\left(\angle\left(\vec{F},\vec{s}\right)\right) = F\ s\ \cos\theta = F_S\ s}. \tag{2}$$

Veličina F_S je projekcija vektora sile $\vec{F}$ na pravac vektora pomeraja, pa važi: $F_S = F\cos\theta$.

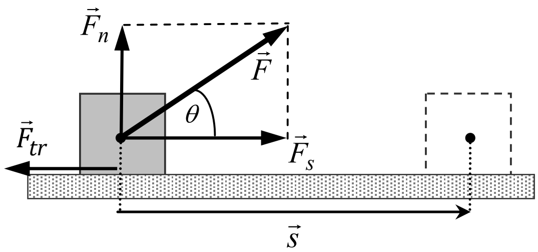
Rad je skalarna veličina. Merna jedinica za rad je: džul (J), pri čemu važi: J= Nm. Džul je jednak radu sile od 1 N na putu od 1m.

S obzirom na to da je intenzitet sile uvek pozitivna veličina, kao i pređeni put (važi: $\left|\vec{F}\right| = F > 0$ i $\left|\vec{s}\right| = s > 0$), vrednost kosinusa ugla između pravaca vektora $\vec{F}$ i vektora $\vec{s}$ određuje da li će rad date sile imati nultu, pozitivnu ili negativnu vrednost. Važi sledeće:

→ $\boldsymbol{A > 0}$ *(motorni rad) za* $0 \le \theta < \pi/2$, *jer je:* $\cos\theta > 0$

→ $\boldsymbol{A = 0}$ *(sila ne vrši rad) za* $\theta = \pi/2$, *jer je:* $\cos\theta = 0$ (*npr. rad sile* $\vec{N}$ *je uvek* $A_N = 0$).

→ $\boldsymbol{A < 0}$ *(otporni rad) za* $\pi/2 < \theta \le \pi$, *jer je:* $\cos\theta < 0$ (*npr. rad sile trenja je negativan*).



Slika 1 – Sila $\vec{F}_s$ je aktivna komponenta sile $\vec{F}$, koja vrši rad na putu s, uzrokujući pomeraj $\Delta\vec{r} \equiv \vec{s}$.

Posmatrajmo primer prikazan na slici 1, gde sila $\vec{F}$ uzrokuje kretanje tela. Ako se vektor $\vec{F}$ razloži na: komponentu $\vec{F}_s$ duž pravca vektora pomeraja i komponentu $\vec{F}_n$ normalnu na pravac pomeraja, onda $\vec{F}_s$ predstavlja aktivnu komponentu sile $\vec{F}$, jer se u stvari pod njenim dejstvom telo kreće. Projekcija F_s u navedenom primeru sa slike 1 ima pozitivnu vrednost i rad sile $\vec{F}$ je pozitivan.

Ukoliko bi se pri kretanju tela posmatralo i dejstvo sile trenja na dato telo (reč je o sili trenja pri klizanju), onda bi se rad sile trenja mogao predstaviti kao:

$$A_{tr} = \vec{F}_{tr} \cdot \vec{s} = F_{tr}\ s \cos\pi = -F_{tr}\ s = F_{trs}\ s. \tag{3}$$

Projekcija vektora sile trenja na pravac vektora pomeraja ima negativnu vrednost ($F_{trs} = F_{tr}\cos\pi = -F_{tr} < 0$). Rad sile trenja je negativan, jer se sila trenja suprotstavlja uspostavljenom kretanju.

Ukoliko u gornjem slučaju *pravolinijskog jednosmernog kretanja* tela koje prelazi put *s*, na telo deluje više konstantnih sila (npr. *n* sila), onda za rezultujuću spoljašnju silu koja deluje na telo važi: $\vec{F}^{ex}_{rez} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}^{ex}_i$ i $\vec{F}^{ex}_{rez} = const$. Ako rad sile $\vec{F}^{ex}_i$ obeležimo sa A^{ex}_i, onda je: $A^{ex}_i = \vec{F}^{ex}_i \cdot \vec{s}$, pa sledi:

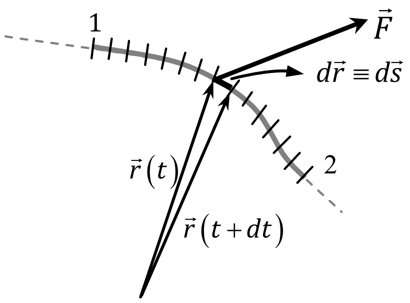
$$A^{ex} = \vec{F}^{ex}_{rez} \cdot \vec{s} = \left(\sum_{i=1}^{n} \vec{F}^{ex}_i\right) \cdot \vec{s} = \sum_{i=1}^{n}\left(\vec{F}^{ex}_i \cdot \vec{s}\ \right) = \sum_{i=1}^{n} A^{ex}_i. \tag{4}$$

Ovde je u drugom koraku iskorišćeno pravilo distributivnosti za skalarni proizvod. Dakle, može se reći:

Rad je aditivna veličina. Rad rezultantne sile je jednak algebarskom zbiru radova pojedinačnih sila.

☼ Primer 2 – Slučaj krivolinijskog kretanja tela pod dejstvom promenljive sile ($\vec{F} \neq const$). Pojam elementarnog rada

Posmatraćemo slučaj kada se kretanje tela može aproksimirati modelom kretanja materijalne tačke, po krivolinijskoj putanji, pod dejstvom sile koja se tokom kretanja menja npr. i po intenzitetu i po pravcu. Pošto tada pri kretanju tela od proizvoljnog položaja 1 do položaja 2 vektor sile nije konstantan, a ni ugao koji sila zaklapa sa vektorom pomeraja nije konstantan, za proračun ukupnog rada (od 1 do 2) ne možemo koristiti izraz (1), tj. izraz (2). Međutim, ako bismo datu krivolinijsku putanju (npr. kao na slici 2) izdelili na beskonačno mnogo infinitezimalno malih delova, onda bi telo tokom kretanja po proizvoljno uočenom infinitezimalno malom deliću putanje izvršilo elementarni pomeraj $d\vec{r}$, pri čemu bi bilo ispunjeno sledeće:



Slika 2 – Vektor sile $\vec{F}$, na deliću putanje duž kojeg telo izvrši elementarni pomeraj, može se smatrati konstantnim. Elementarni pomeraj je brojno jednak elementarnom pređenom putu.

- infinitezimalno mali delići putanje se mogu smatrati približno pravolinijskim, pa je intenzitet elementarnog pomeraja $d\vec{r}$ jednak pređenom elementarnom putu ds, tj. važi: ($|d\vec{r}| = ds$); stoga se u tehničkoj literaturi za vektor elementarnog pomeraja često koristiti i oznaka $d\vec{s}$;

- sila koja deluje na telo duž infinitezimalno malog delića putanje ne stiže da se promeni i ostaje konstantna kao vektor, tj. važi da je $\vec{F}=const$ na putu ds. Zato se za elementarni rad, koji izvrši ta sila $\vec{F}$ pri elementarnom pomeraju tela $d\vec{r}\equiv d\vec{s}$, može koristiti izraz oblika (1) ili (2), pri čemu u tom izrazu umesto konačnog vektora pomeraja figuriše elementarni pomeraj, a umesto ukupnog rada sile na proizvoljno velikom putu – figuriše ***elementarni rad,*** koji se može izraziti kao[1]:

$$dA=\vec{F}\cdot d\vec{r}=F\,dr\,\cos\left(\angle\left(\vec{F},d\vec{r}\right)\right), \tag{5}$$

odnosno kao:

$$\boxed{dA=\vec{F}\cdot d\vec{s}=F\,ds\,\cos\left(\angle\left(\vec{F},d\vec{s}\right)\right)=F_s\,ds}, \tag{6}$$

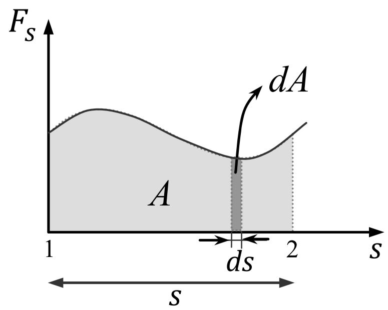
gde je F_s intenzitet komponente sile u pravcu elementarnog pomeraja. Pošto je rad aditivna veličina, ukupni rad promenljive sile $\vec{F}$ pri pomeranju tela na putu od položaja 1 do položaja 2 se dobija sabiranjem svih elementarnih radova, a ta suma beskonačno velikog broja infinitezimalno malih članova se svodi na integral. Dakle, važi sledeće:

Ukupni rad sile $\vec{F}$ na putu od položaja* 1 *do položaja* 2 *se može izraziti kao:

$$\boxed{A=\int_1^2 dA=\int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{s}=\int_0^s F\,ds\,\cos\left(\angle\left(\vec{F},d\vec{s}\right)\right)=\int_0^s F_s\,ds}. \tag{7}$$

1.2. Grafički prikaz rada

Na slici 3 je dat grafički prikaz zavisnosti intenziteta komponente sile u pravcu elementarnog pomeraja (F_s) od položaja na putu, za slučaj promenljive sile. Pošto po definiciji elementarnog rada (na infinitezimalno malom deliću puta *ds*) važi: $dA=\vec{F}\cdot d\vec{s}=F_s ds$, onda je taj elementarni rad brojno jednak površini tamno osenčenog pravougaonika visine F_s i infinitezimalno male širine ds. Sabiranjem površina svih analognih elementarnih pravougaonika na putu s, od tačke 1 do tačke 2 na slici, (tj. integraljenjem: $A=\int_0^A dA=\int_0^s \vec{F}\cdot d\vec{s}=\int_0^s F_s ds$) dobija se ukupan rad na putu s i taj rad je brojno jednak celokupnoj svetlo osenčenoj površini ispod krive zavisnosti $F_s=f(s)$.



Slika 3 – Grafički prikaz elementarnog i ukupnog rada sile.

1.3. Različiti ekvivalentni izrazi za elementarni i ukupni rad:

Ako se u izraz koji definiše elementarni rad rezultujuće spoljašnje sile: $dA^{ex}=\vec{F}_{rez}^{ex}\cdot d\vec{s}$, uvrsti izraz za silu prema osnovnom zakonu dinamike (II Njutnovom zakonu): $\vec{F}_{rez}^{ex}=d\vec{p}/dt$, dobija se:

$$\boxed{dA^{ex}=\vec{F}_{rez}^{ex}\cdot d\vec{s}=\frac{d\vec{p}}{dt}\cdot d\vec{s}=d\vec{p}\cdot\frac{d\vec{s}}{dt}=d\vec{p}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}=d\vec{p}\cdot\vec{\upsilon}=\vec{\upsilon}\cdot d\vec{p}}. \tag{8}$$

[1] Ovde bi bilo pravilnije koristiti oznaku *δA* umesto *dA*, jer veličina $\vec{F}\cdot d\vec{s}$ nije uvek totalni diferencijal, već samo u slučaju rada tzv. konzervativnih sila. Ipak, radi jednostavnosti, u ovom kursu koristiće se samo oznaka *dA*.

Sledi da se ukupni rad spoljašnje sile na dato telo, na putu od položaja 1 do položaja 2, može izraziti i kao:

$$\boxed{A^{ex} = \int_1^2 dA^{ex} = \int_1^2 \vec{F}_{rez}^{ex} \cdot d\vec{s} = \int_1^2 \vec{\upsilon} \cdot d\vec{p}}, \tag{9}$$

tj. kao :

$$\boxed{A^{ex} = \int_0^{A^{ex}} dA^{ex} = \int_0^{s} \vec{F}_{rez}^{ex} \cdot d\vec{s} = \int_{p_1}^{p_2} \vec{\upsilon} \cdot d\vec{p}}, \tag{10}$$

gde je $\vec{\upsilon}$ brzina tela. Rad zavisi od izbora koordinatnog sistema u odnosu na koji se posmatra kretanje tela.

Napomena: Treba imati u vidu da sila vrši mehanički rad i u slučaju kada pod njenim dejstvom telo (ili deo tela) menja oblik. Pri tome, $dA = \vec{F} \cdot d\vec{s} = \vec{\upsilon} \cdot d\vec{p}$ predstavlja elementarni rad koji se izvrši pri pomeranju nekog delića tela, a ukupan rad se dobija integracijom po svim delićima tela (različiti delići mogu imati različito elementarno pomeranje, a i sila koja vrši pomeranje datog delića se može razlikovati od delića do delića).

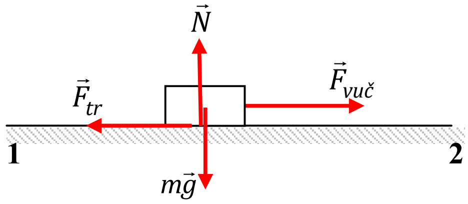
1.4. Neki primeri proračuna rada

☼ Rad gravitacione sile

Primer 1:

Rad gravitacione sile pri horizontalnom pomeranju tela mase *m*, iz položaja 1 u položaj 2 (slika 4), je jednak nuli. Važi:

$$A_g = \int_1^2 \vec{F}_g \cdot d\vec{s} = \int_1^2 m\vec{g} \cdot d\vec{s} = \int_0^{s=h} mg\cos\frac{\pi}{2} ds = 0 .$$



Slika 4 – Prikaz uz razmatranje rada sile gravitacije pri horizontalnom pomeranju tela.

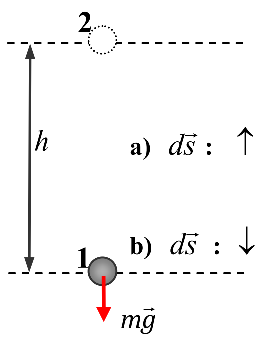
Primer 2:

a) Rad gravitacione sile pri pomeranju tela mase *m* vertikalno naviše, iz položaja 1 u položaj 2, je negativan i iznosi[2]: $-mgh$. Važi:

$$A_g = \int_1^2 \vec{F}_g \cdot d\vec{s} = \int_1^2 m\vec{g} \cdot d\vec{s} = \int_0^{s=h} mg\cos\pi\, ds = -\int_0^{s=h} mg\, ds = -mg\int_0^{s=h} ds = -mgh < 0$$

b) Rad gravitacione sile pri vertikalnom spuštanju tela mase *m* iz položaja 2 u položaj 1 (npr. pri slobodnom padu) je pozitivan i iznosi: mgh. Važi:

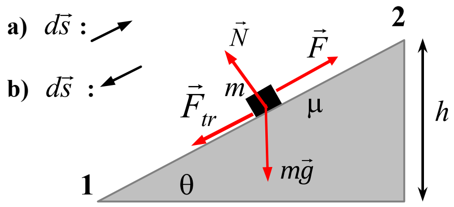
$$A_g = \int_2^1 \vec{F}_g \cdot d\vec{s} = \int_2^1 m\vec{g} \cdot d\vec{s} = \int_0^{s=h} mg\cos 0\, ds = \int_0^{s=h} mg\, ds = mg\int_0^{s=h} ds = mgh > 0 .$$



Slika 5 – Prikaz uz razmatranje rada sile gravitacije pri vertikalnom pomeranju tela.

[2] Razmatrani primer se odnosi i na slučaj kada se telo kreće vertikalno naviše usled dejstva neke vučne sile i na slučaj kada je telo bačeno vertikalno naviše nekom početnom brzinom.

Primer 3:



Slika 6 – Prikaz uz razmatranje rada sile gravitacije pri kretanju tela duž strme ravni.

a) Rad gravitacione sile pri kretanju tela mase *m* uz strmu ravan, iz položaja 1 u položaj 2 (telo se podiže usled dejstva neke vučne sile $\vec{F}$) je negativan i iznosi: $-mgh$. Važi:

$$A_g = \int_1^2 \vec{F}_g \cdot d\vec{s} = \int_1^2 m\vec{g} \cdot d\vec{s} = \int_0^s mg\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)ds =$$
$$-\int_0^s mg\sin\theta\, ds = -mg\sin\theta \int_0^s ds = -mg\sin\theta\, s = -mgh < 0$$

b) Rad gravitacione sile pri spuštanju tela mase *m* niz strmu ravan, iz položaja 2 u položaj 1 je pozitivan i iznosi: mgh.

$$A_g = \int_2^1 \vec{F}_g \cdot d\vec{s} = \int_2^1 m\vec{g} \cdot d\vec{s} = \int_0^s mg\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)ds = \int_0^s mg\sin\theta\, ds = mg\sin\theta \int_0^s ds = mg\sin\theta\, s = mgh > 0.$$

Iz primera 2 i 3 sledi da:

- ukoliko je došlo do podizanja tela na položaj koji je od početnog položaja *viši* za neko *h*, onda je rad gravitacione sile negativan i iznosi $A_g = -mgh < 0$, nezavisno od konkretne putanje tela.
- ukoliko je došlo do spuštanja tela na položaj koji je od početnog položaja *niži* za neko *h*, onda je rad gravitacione sile pozitivan i iznosi $A_g = mgh > 0$, nezavisno od konkretne putanje tela.

☼ Rad sile reakcije podloge

Bez obzira na to da li je nagib podloge u odnosu na horizontalni pravac jednak nuli (sl. 4) ili ne (sl. 6), uvek važi:

$$A_N = \int_1^2 \vec{N} \cdot d\vec{s} = \int_0^s N\, ds \cos\left(\vec{N}, d\vec{s}\right) = \int_0^s N\, ds \cos\frac{\pi}{2} = 0.$$

☼ Rad sile trenja pri klizanju

Smer sile trenja je uvek suprotan od smera kretanja tela u odnosu na posmatranu površinu (duž koje postoji trenje). Sledi da za proizvoljan slučaj kretanja tela (npr. kretanje prikazano na slici 4 i na slici 6) važi:

$$A_{tr} = \int_1^2 \vec{F}_{tr} \cdot d\vec{s} = \int_0^s F_{tr}\, ds\, \cos\left(\vec{F}_{tr}, d\vec{s}\right) = \int_0^s F_{tr}\, ds\, \cos\pi = -\int_0^s F_{tr}\, ds = -\int_0^s \mu N\, ds < 0.$$

☼ Rad sile elastičnosti

Sila elastičnosti[3] je suprotno usmerena od smera porasta elastične deformacije (npr. smera istezanja, ili smera sabijanja tela, izazvanog spoljašnjom silom), tj. ona teži da smanji nastalu deformaciju, a intenzitet joj je proporcionalan deformaciji (videti str. 75). Na primer, pri istezanju opruge u smeru *x* ose, za neku vrednost *x*, može se pisati: $\vec{F}_e = -kx\vec{i}$, gde je *k* – krutost opruge. Rad sile elastičnosti pri ukupnom istezanju za neko Δl duž *x* ose (pri čemu se nefiksirani kraj opruge pomeri od položaja 1 do položaja 2) može da se predstavi kao:

$$A_{Fe} = \int_1^2 \vec{F}_e \cdot d\vec{s} = -\int_1^2 kx\vec{i} \cdot d\vec{s} = -\int_0^{\Delta l} kx\vec{i} \cdot d\vec{x} = -\int_0^{\Delta l} kx\, dx \cos 0 = -k\int_0^{\Delta l} x\, dx = -k\frac{(\Delta l)^2}{2}.$$

Pri povećanju elastične deformacije, rad sile elastičnosti je negativan.

[3] O sili elastičnosti, kao i o elastičnim deformacijama tela uopšte, će biti više reći u jednoj od sledećih glava.

2. SNAGA

Snaga je fizička veličina koja ukazuje na efekat vršenja rada. Može se reći:

Srednja snaga je brojno jednaka radu koji se izvrši u jedinici vremena:

$$\boxed{P_{sr} = \frac{A}{\Delta t}}. \tag{11}$$

Snaga je, kao i rad, skalarna veličina. Merna jedinica za snagu je: vat (W= J/s).

Ukoliko se srednja snaga posmatra u beskonačno malom vremenskom intervalu, onda se ona svodi na trenutnu snagu. Može se reći:

Trenutna snaga je brojno jednaka brzini vršenja rada od strane sile[4]:

$$\boxed{P = \frac{dA}{dt} = \frac{\vec{F}\cdot d\vec{s}}{dt} = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{s}}{dt} = \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{\upsilon}}. \tag{12}$$

Rad se može predstaviti i preko obrasca:

$$\boxed{A = \int_{t_1}^{t_2} P\, dt}. \tag{13}$$

3. KONZERVATIVNE I NEKONZERVATIVNE SILE

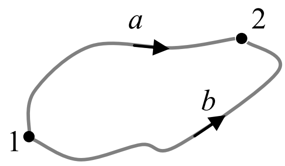
Konzervativne sile

Sila je konzervativna **ako ispunjava svako od sledećih tvrđenja:**

1. ***Sila $\vec{F}$, koja deluje na telo, zavisi samo od položaja tela. Za dati položaj tela ta sila se ne menja u vremenu (tzv. stacionarna sila). Ova sila ne zavisi od brzine tela.***

2. ***Vektor sile $\vec{F}$ se može izraziti u obliku:*** $\vec{F} = -\left(\frac{\partial Ep}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial Ep}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial Ep}{\partial z}\vec{k}\right) = -grad\ E_p = -\vec{\nabla} E_p$***, gde je*** E_p ***skalarna veličina koja zavisi samo od položaja tela***[5]***;***

3. ***Rad sile ne zavisi od oblika putanje koju telo opiše, već samo od početnog i krajnjeg položaja tela (*** $A_{12}^a = A_{12}^b$ ***). Iz toga proizilazi da važi:*** $A_{121} = A_{12}^a + A_{21}^b = A_{12}^a - A_{12}^b = 0$***, pa je rad te sile po zatvorenoj putanji jednak nuli:*** $A_{121} = \oint \vec{F}\cdot d\vec{s} = 0$ **;**



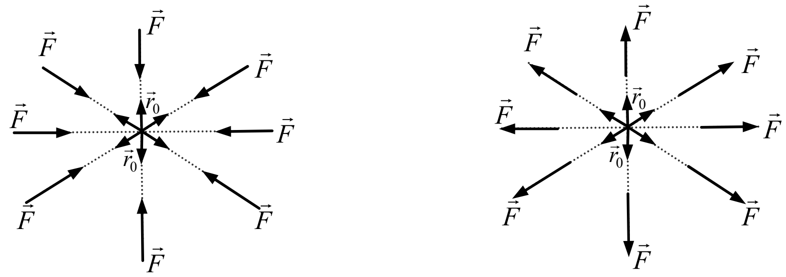
Slika 7 – Iako se putanje tela od položaja 1 do položaja 2 razlikuju, rad *konzervativne* sile će pri tom kretanju biti isti, usled čega je rad te sile na zatvorenoj putanji jednak nuli.

Jedan od primera konzervativnih sila su *centralne sile.* Centralne sile deluju duž radijalnih pravaca koji se seku u jednoj nepokretnoj tački u prostoru. Ta tačka se naziva centar sile. Centralna sila može imati smer ka centru sile, ili od njega. Intenzitet centralne sile zavisi samo od rastojanja napadne tačke sile od izvora sile, pa važi: $\vec{F} = F(r)\cdot\vec{r}_0$, gde je r rastojanje napadne tačke sile od izvora sile, a $\vec{r}_0$ je jedinični vektor u radijalnom pravcu. Na slici 8 je šematski prikazano polje privlačne centralne sile (leva sl.) i polje odbojne

[4] Može se poći i od izraza $dA = \vec{\upsilon}\cdot d\vec{p}$, odakle sledi: $P = dA/dt = \vec{\upsilon}\cdot d\vec{p}/dt = \vec{\upsilon}\cdot\vec{F} = \vec{F}\cdot\vec{\upsilon}$.

[5] Konzervativna sila je jednaka negativnom gradijentu skalarne veličine $E_p=f(x,y,z)$, tj. negativnom izvodu veličine E_p po vektoru položaja.

centralne sile (desna sl.). U centralne sile spada npr.: 1) gravitaciona sila i 2) Kulonova sila elektrostatičke interakcije, koja se javlja između dva tačkasta naelektrisanja.



Slika 8 – Primeri vektora centralnih sila, usmerenih ka centru (a) i od centra(b) u kojem se seku pravci tih sila.

Nekonzervativne sile

Sile čiji rad zavisi od puta na kojem one deluju su nekonzervativne sile. Primer za nekonzervativne sile su tzv. disipativne sile. Te sile imaju isti pravac kao vektor relativne brzine tela u odnosu na sredinu u kojoj se telo kreće, ali imaju suprotan smer od smera vektora relativne brzine tela. Intenzitet ovih sila je određen izrazom oblika: $\vec{F}=-k\vec{v}$, gde je k - pozitivna skalarna veličina koja može biti funkcija brzine tela i može zavisiti od svojstava sredine kroz koju se telo kreće. Primer disipativnih sila su sile trenja (uključujući i silu otpora sredine).

Polje sila

Ako na česticu u svakoj tački posmatranog prostora deluje neka određena sila (u smislu jednog tipa sile, kao što je npr. sila Zemljine teže), onda *skup vektora* te *sile u svakoj tački posmatranog prostora nazivamo poljem te sile* i kažemo da se telo nalazi u polju date sile. Fizičko polje je realni geometrijski prostor u kojem se odvijaju fizički procesi. U opštem slučaju, vektorsko polje neke sile može zavisiti i od prostornih koordinata i od vremena. *Polje onih sila koje se ne menjaju sa vremenom (stacionarnih sila)* je *stacionarno polje*.

Polje konzervativne sile se zove potencijalno polje.

4. MEHANIČKA ENERGIJA TELA

Energija je skalarna fizička veličina, koja se može smatrati kvantitativnom karakteristikom stanja materije u datim uslovima. U fizici se izučavaju različite forme kretanja materije, pa se za njih uvode i odgovarajuće vrste energije: mehanička, toplotna, hemijska, električna i dr. Sve ove vrste energija se u suštini mogu svesti na tri osnovna tipa: gravitacionu, elektromagnetsku i nuklearnu energiju.

Ako se telo nalazi u nekom potencijalnom polju i/ili ako ima nenultu brzinu (u datom koordinatnom sistemu), onda to telo, zahvaljujući svom položaju u datom potencijalnom polju i/ili zahvaljujući brzini koju ima, raspolaže nekom energijom koju nazivamo »*mehanička energija*« tela.

Na račun energije koju ima, telo može izvršiti rad delujući silom na druga tela, pa se može reći:

Energija je mera sposobnosti tela da izvrši rad.

Pri tome važi:

Mehanička energija je mera sposobnosti tela da izvrši rad usled toga što to telo ima određeni položaj u nekom potencijalnom polju i/ili usled toga što ima neku brzinu.

Osnovni oblici mehaničke energije tela su: a) tzv. kinetička energija tela, koja je određena impulsom tela (količinom kretanja tela) i b) potencijalna energija tela, koja je određena položajem tela u polju neke konzervativne sile. Ukupna mehanička energija *tela* se može predstaviti kao zbir kinetičke i potencijalne energije tela. Takođe, ukupna mehanička energija *sistema tela* je jednaka zbiru kinetičkih i potencijalnih energija svih tela u sistemu.

Sa druge strane važi:

Rad, koji neka spoljašnja sila izvrši pri pomeranju tela ili sistema tela, dovodi do promene bar nekog od oblika energije tela (sistema). Rad je po apsolutnoj vrednosti uvek jednak promeni nekog oblika energije tela (sistema).

Onda je logično da se energija i rad izražavaju istom mernom jedinicom. Međutim, ***iako su dimenziono jednaki, energija i rad se kvalitativno razlikuju.*** Možemo reći da telo ima neku energiju, ali ne možemo reći da to telo ima neki iznos rada. ***Dok energija karakteriše stanje tela, rad karakteriše proces prelaska tela iz jednog u drugo stanje.*** Dakle, rad karakteriše proces u kojem: 1) energija datog tela prelazi iz jednog oblika u drugi, ili 2) telo razmenjuje energiju sa okolinom, odnosno sa drugim telima.

4.1. Kinetička energija tela

Kinetička energija je uslovljena kretanjem tela. Može se reći:

Kinetička energija je energija koju telo ima usled toga što poseduje neku brzinu, odnosno neki impuls.

Važi i sledeće:

Kinetička energija je mera sposobnosti tela da izvrši rad zahvaljujući svom kretanju.

Na primer, ukoliko razmatramo *samo horizontalne* vodene tokove i *horizontalna* strujanja vazdušnih masa, onda možemo reći da oni pri delovanju na neka druga tela vrše rad zahvaljujući svom impulsu, odnosno zahvaljujući svojoj kinetičkoj energiji (voda pomera kamenje sa dna reke, okreće točak vodenice, ili zakreće lopatice turbine, vetar okreće krake vetrenjače i pomera jedrilicu delujući na njena jedra, itd.).

Sa druge strane, u okviru II Njutnovog zakona se ističe da se dejstvo rezultujuće spoljašnje sile ($\vec{F}_{rez}^{ex}$) na telo mase *m* manifestuje u promeni brzine tela. Rad koji pri tome vrši ta sila se ulaže u promenu brzine tela, a mera tog uloženog rada je promena kinetičke energije tela. Matematički izraz za kinetičku energiju se upravo dobija iz izraza za elementarni rad rezultujuće spoljašnje sile pod čijim se dejstvom telo kreće nekom brzinom. Naime, iz jednačine (8) sledi da je ***matematički izraz za elementarni rad sile $\vec{F}_{rez}^{ex}$:***

$$dA^{ex} = \vec{\upsilon} \cdot d\vec{p} \qquad (14)$$

i on se u slučaju kada je masa tela konstantna svodi na[6]***:***

$$dA^{ex} = \vec{\upsilon} \cdot d\left(m\vec{\upsilon}\right) = m\vec{\upsilon} \cdot d\vec{\upsilon} = m\frac{1}{2}d\left(\vec{\upsilon}^2\right) = m\frac{1}{2}d\left(\upsilon^2\right) = d\left(m\upsilon^2/2\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{dA^{ex} = d\left(m\upsilon^2/2\right)}. \qquad (15)$$

Pošto elementarni rad mora biti jednak elementarnoj promeni nekog oblika energije, onda ***veličina koja je prikazana u zagradi (u poslednjem obrascu) predstavlja neki oblik energije koji zavisi od brzine tela. To je zapravo kinetička energija tela. Važi:***

$$\boxed{dA^{ex} = dE_k} \qquad \text{i} \qquad \boxed{E_k = m\upsilon^2/2}. \qquad (16)$$

Matematički izraz za kinetičku energiju tela ukazuje da ona zavisi od brzine tela i od inercijalnih svojstava tela. Merna jedinica je: J= N·m= kg·m²/s². Pošto vrednost brzine tela zavisi od izbora referentnog koordinatnog sistema, onda i vrednost kinetičke energije tela zavisi od toga.

Opštiji izraz za kinetičku energiju se dobija kada se ona izrazi preko impulsa tela. Važi:

$$p = m\upsilon \quad \Rightarrow \quad p^2 = m^2\upsilon^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_k = p^2/2m}. \qquad (17)$$

Integraljenjem izraza $dA^{ex} = d\left(m\upsilon^2/2\right)$, na putu od položaja 1 do položaja 2, dobija se: $\int_1^2 dA^{ex} = \int_1^2 dE_k$,

odnosno:

---

[6] Važi: $d\left(\vec{\upsilon}^2\right) = d\left(\vec{\upsilon}\cdot\vec{\upsilon}\right) = d\vec{\upsilon}\cdot\vec{\upsilon} + \vec{\upsilon}\cdot d\vec{\upsilon} = \vec{\upsilon}\cdot d\vec{\upsilon} + \vec{\upsilon}\cdot d\vec{\upsilon} = 2\vec{\upsilon}\cdot d\vec{\upsilon}$. Sledi: $\vec{\upsilon}\cdot d\vec{\upsilon} = d\left(\vec{\upsilon}^2\right)/2$.
Takođe važi: $\vec{\upsilon}^2 = \vec{\upsilon}\cdot\vec{\upsilon} = \upsilon\cdot\upsilon\cdot\cos 0 = \upsilon^2$, pa sledi: $d\left(\vec{\upsilon}^2\right) = d\left(\upsilon^2\right)$.

$$A_{12}^{ex} = E_{k2} - E_{k1} = \frac{m\upsilon_2^2}{2} - \frac{m\upsilon_1^2}{2} = \Delta E_k \quad \Rightarrow \quad \boxed{A^{ex} = \Delta E_k}. \tag{18}$$

Rad rezultujuće spoljašnje sile koja deluje na neko telo je jednak promeni kinetičke energije tog tela.

Posmatrajmo slučaj kada je: $E_{k1} = 0$ i $E_{k2} = m\upsilon^2 / 2$. Tada je:

$$\Delta E_k = E_{k2} - 0 = A_{12}^{ex} \quad \Rightarrow \quad E_{k2} = A_{12}^{ex}. \tag{19}$$

Zaključujemo da se može reći:

Kinetička energija tela je brojno jednaka radu koji izvrši rezultujuća spoljašnja sila da bi to telo ubrzala na nekom putu, tako da iz stanja mirovanja pređe u stanje sa brzinom υ.

Ako je rad rezultujuće sile koja deluje na telo jednak nuli, usled toga što je pravac te sile sve vreme normalan na pravac brzine tela (tj. na pravac elementarnog pomeraja tela), ili usled toga što je $\vec{F}_{rez}^{ex} = 0$ (slučaj izolovanog tela), onda važi:

$$\boxed{A^{ex} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta E_k = 0 \quad \Rightarrow \quad E_k = const}. \tag{20}$$

Dakle, ***kinetička energija izolovanog tela ostaje konstantna.***

Ako je $A^{ex} \neq 0$, a kinetička energija tela se smanjuje, to znači da je $A^{ex} < 0$, pa se kaže da u tom slučaju telo vrši rad nad okolnim telima, smanjujući usled toga svoju kinetičku energiju.

4.2. Potencijalna energija tela

Ispostavlja se da telo može imati mehaničku energiju i kada mu je brzina jednaka nuli, ukoliko se nalazi u polju konzervativne sile. Tada se mehanička energija tog tela svodi na tzv. potencijalnu energiju.

Potencijalna energija je energija koju telo ima usled toga što se nalazi na nekom određenom položaju u polju konzervativne sile[7].

Reč je zapravo o položaju tog tela u odnosu na položaj drugog tela sa kojim ono interaguje u pomenutom polju. Prema datoj definiciji, ***potencijalna energija zavisi samo od položaja tela u potencijalnom polju*** i predstavlja neku funkciju prostornih koordinata, pa je možemo obeležiti kao: $E_p(\vec{r})$, tj. kao $E_p(x,y,z)$.

Na primer, ako se telo mase *m* nalazi u stanju mirovanja na nekoj visini *h* iznad Zemlje (u gravitacionom polju Zemlje, gde postoji gravitaciona sila između tela i Zemlje), onda to telo ima energiju koja se svodi samo na gravitacionu potencijalnu energiju, definisanu u odnosu na neki referentni (nulti) nivo. Na račun smanjenja te potencijalne energije (pri spuštanju tela u gravitacionom polju), telo može izvršiti rad nad nekim drugim telima. Ako pri pri kretanju vodenih tokova i vazdušnih masa, dolazi i do njihove visinske promene (u polju gravitacione sile Zemlje), onda oni pri delovanju na neka druga tela (npr. na lopatice vodenice, hidraulične turbine ili vetrenjače) vrše rad, ne samo zahvaljujući svojoj kinetičkoj energiji, već i svojoj potencijalnoj energiji.

Takođe, opruga koja je elastično deformisana pod uticajem nekog drugog tela ima potencijalnu energiju, jer tada postoji polje dejstva elastične sile. Tada opruga deluje na to telo silom elastičnosti (kao konzervativnom silom) i obrnuto – telo deluje na oprugu silom istog intenziteta i pravca, a suprotnog smera. Pri tome, elastično deformisana opruga raspolaže nekim iznosom potencijalne energije zbog svog položaja u odnosu na položaj nedeformisane opruge. Zahvaljujući tome, elastično deformisana opruga može izvršiti neki rad nad telom koje je zakačeno za nju (npr. ako sabijenu oprugu pustimo, ona će težiti da se vrati u ravnotežni položaj i pri tome će gurati telo koje je zakačeno za nju). Takođe, zategnuti luk, usled deformacije istezanja, deluje na strelu i vrši rad pomerajući je. Zato se može reći sledeće:

[7] Kada govorimo o potencijalnoj energiji kao obliku mehaničke energije, najčešće mislimo na potencijalnu energiju tela u gravitacionom polju, ili npr. na potencijalnu energiju u polju dejstva sile elastičnosti. Sa druge strane, može se govoriti i o potencijalnoj energiji u polju dejstva Kulonove elektrostatičke sile (jer i ona spada u konzervativne sile), itd.

Potencijalna energija je mera sposobnosti tela da izvrši rad zahvaljujući svom položaju u polju konzervativne sile.

Za razliku od kinetičke energije tela, za koju postoji jasan matematički izraz, koji je povezuje sa masom tela i kvadratom brzine tela, za potencijalnu energiju nema opšteg izraza, već konkretni oblik izraza za potencijalnu energiju zavisi od:

a) tipa konzervativnih sila koje deluju (npr. gravitaciona sila, sila elastičnosti, ili Kulonova sila, itd.)
b) izbora nultog (referentnog) nivoa potencijalne energije.

Povodom konstatacije pod b), može se reći da potencijalna energija nije jednoznačno određena, već je određena do neke proizvoljne konstante. Ta konstanta zavisi od izbora referentnog nivoa koji se uzima kao nivo na kojem je potencijalna energija jednaka nuli. Međutim, ono što je suštinski bitno pri rešavanju problema u oblasti dinamike je da *promena potencijalne energije tela*, pri premeštanju tela iz datog početnog u dati konačni položaj u polju dejstva posmatrane konzervativne sile, *ne zavisi od izbora referentnog nivoa*.

Izraz za potencijalnu energiju se dobija pri razmatranju elementarnog rada konzervativne sile pri pomeranju nekog tela. Naime, rečeno je da potencijalna energija zavisi samo od položaja tela u polju date konzervativne sile. Sa druge strane, rad konzervativnih sila zavisi samo od početnog i krajnjeg položaja tela i može se predstaviti kao negativna promena neke skalarne fizičke veličine koja zavisi od položaja tog tela u polju date konzervativne sile. Sledi da ta veličina mora biti potencijalna energija tela. Važi:

$$\boxed{A_{konz}^{ex} = \int_1^2 dA_{konz}^{ex} = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}_{konz}^{ex} \cdot d\vec{r} = -\int_{E_{p1}}^{E_{p2}} dE_p = -\left(E_{p2} - E_{p1}\right) = -\Delta E_p}. \tag{21}$$

Može se reći da se pozitivan rad konzervativne sile vrši na račun smanjenja potencijalne energije tela, $E_p(r)$, pri pomeranju tela od položaja definisanog sa $\vec{r}_1$ do položaja definisanog sa $\vec{r}_2$, u polju neke konzervativne sile. Dakle važi:

$$\boxed{dA_{konz}^{ex} = -dE_p} \quad \text{i} \quad \boxed{A_{konz}^{ex} = -\Delta E_p}. \tag{22}$$

Rad spoljašnjih konzervativnih sila je jednak negativnoj promeni potencijalne energije tela.

Posmatrajmo slučaj kada je $E_{p1} = 0$. Tada je:

$$-\Delta E_p = -\left(E_{p2} - 0\right) = -E_{p2} = A_{konz}^{ex} \quad \Rightarrow \quad E_{p2} = -A_{konz}^{ex}. \tag{23}$$

Potencijalna energija tela u nekom položaju u polju konzervativne sile je jednaka negativnoj vrednosti rada koji izvrši ta konzervativna sila pri premeštanju datog tela iz položaja nulte potencijalne energije do tog uočenog položaja.

Sa druge strane, da smo da nulti (referentni) nivo potencijalne energije postavili u konačni položaj tela (položaj 2): $E_{p2} = 0$, onda bi važilo: $-\Delta E_p = -\left(0 - E_{p1}\right) = E_{p1} = A_{konz}^{ex} \;\Rightarrow\; E_{p1} = A_{konz}^{ex}$. Sledi:

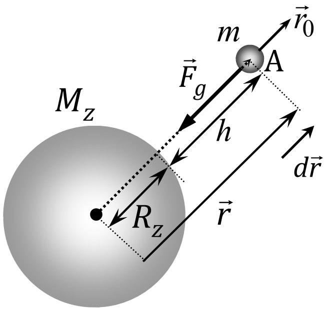
Potencijalna energija tela u nekom položaju u polju konzervativne sile je jednaka radu koji izvrši ta konzervativna sila pri premeštanju datog tela iz pomenutog položaja do položaja nulte potencijalne energije.

U primerima koji su dati u daljem tekstu, prikazano je izvođenje izraza za potencijalnu energiju tela u polju gravitacione sile (za dva različito izabrana referentna nivoa nulte potencijalne energije), kao i izvođenje izraza za potencijalnu energiju elastično deformisane opruge.

4.2.1. Primeri proračuna potencijalne energije tela

◆ Potencijalna energija tela u gravitacionom polju

U daljem tekstu će za telo mase *m*, koje se nalazi u gravitacionom polju Zemlje, na visini *h* iznad površine Zemlje, biti izvedeni izrazi za potencijalnu energiju u slučaju kada je referentni (nulti) nivo za E_p postavljen: a) u beskonačnosti i b) na površini Zemlje. Telo se razmatra u modelu materijalne tačke.



Slika 9 – Ilustracija uz jednačine (25) – (35).

a) Referentni nivo za gravitacionu potencijalnu energiju je u beskonačnosti

Telo mase m se nalazi u tački A u gravitacionom polju Zemlje, na rastojanju r od centra Zemlje. (sl. 9). Ort vektora položaja tela u odnosu na centar Zemlje (ort vektora $\vec{r}$) je ort $\vec{r}_0$. Logično je pretpostaviti da je gravitaciona potencijalna energija jednaka nuli onda kada je gravitaciona sila između Zemlje i tela jednaka nuli, a to znači onda kada su tela na beskonačnoj međusobnoj udaljenosti. Zato ćemo najpre razmotriti opciju kada je referentni (nulti) nivo za E_p stavljen u beskonačnost.

Po Njutnovom zakonu opšte gravitacije, Zemlja mase M_z privlači telo mase m gravitacionom silom $\vec{F}_g$ (slika 9), koja se može predstaviti kao:

$$\vec{F}_g = -\gamma \frac{M_z m}{r^2} \vec{r}_0 . \tag{24}$$

Ta gravitaciona sila pri elementarnom pomeraju $d\vec{r}$ tela mase m (duž pravca i smera vektora $\vec{r}$, kao na sl. 9) izvrši elementarni rad:

$$dA_g = \vec{F}_g \cdot d\vec{r} = -\gamma \frac{M_z m}{r^2} \vec{r}_0 \cdot d\vec{r} = -\gamma \frac{M_z m}{r^2} dr . \tag{25}$$

gde je: $d\vec{r} \| \vec{r}_0$ i važi: $\vec{r}_0 d\vec{r} = \cancelto{1}{|\vec{r}_0|} |d\vec{r}| \cancelto{1}{\cos(\vec{r}_0, d\vec{r})} = dr$.

Gravitaciona sila je konzervativna, a elementarni rad konzervativnih sila je jednak negativnoj vrednosti elementarne promene potencijalne energije, pa važi: $dA_{konz} = -dE_p$. Sledi:

$$dE_p = -dA_g = \gamma M_z m \frac{dr}{r^2} . \tag{26}$$

Pri pomeranju tela od položaja gde je: $r = R_z + h$ do položaja gde je: $r \to \infty$, potencijalna energija tela se menja od neke vrednosti E_p koju treba odrediti, do nulte vrednosti. Onda sledi:

$$\int_{E_p}^{0} dE_p = \int_{r}^{\infty} \gamma \frac{M_z m}{r^2} dr . \tag{27}$$

Konačno se za potencijalnu energiju tela dobija:

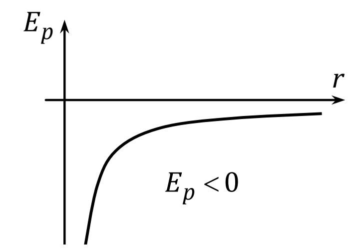
$$-E_p = \gamma M_z m \left(-\frac{1}{r} \right) \Bigg|_r^{\infty} = -\gamma M_z m \left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{r} \right) = \gamma \frac{M_z m}{r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_p = -\gamma \frac{M_z m}{r}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_p \sim -\frac{1}{r}} . \tag{28}$$

U ovde razmatranom slučaju je: $r = R_z + h$, pa može da se piše i:

$$\boxed{E_p = -\gamma \frac{M_z m}{(R_z + h)}} . \tag{29}$$

Grafik zavisnosti gravitacione potencijalne energije tela od rastojanja

Iz izraza (28) *sledi da je gravitaciona potencijalna energija tela mase m, u gravitacionom polju tela M, negativna i obrnuto proporcionalna međusobnom rastojanju (r) tela m i M, ako se nulti nivo za E_p* izabere u beskonačnosti. Na slici 10 je dat grafički prikaz zavisnosti gravitacione potencijalne energije jednog tela u



Slika 10 – Zavisnost gravitacione potencijalne energije od međusobnog rastojanja tela.

gravitacionom polju dejstva drugog tela od međusobnog rastojanja tih tela. Da smo umesto gravitacione sile (koja je uvek privlačna) razmatrali neku odbojnu centralnu silu između dva tela na rastojanju *r*, onda bi vrednost potencijalne energije bila pozitivna i u opštem slučaju bi bila obrnuto proporcionalna nekom stepenu rastojanja *r*.

b) Referentni nivo za gravitacionu potencijalnu energiju je na površini Zemlje

Ako referentni (nulti) nivo za gravitacionu potencijalnu energiju stavimo na površinu Zemlje, onda se pri pomeranju tela od položaja na površini Zemlje do položaja za koji važi: $r = R_z + h$, potencijalna energija tela menja od nulte vrednosti do neke vrednosti E_p koju treba odrediti. Pri tome važi ranije izvedena relacija (26), koja izražava elementarnu promenu gravitacione potencijalne energije tela mase *m* pri njegovom elementarnom pomeraju u smeru od Zemlje. Iz te relacije sledi:

$$\int_0^{E_p} dE_p = \int_{R_z}^{R_z+h} \gamma M_z m \frac{dr}{r^2} \tag{30}$$

$$E_p = \gamma M_z m \left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{R_z}^{R_z+h} = -\gamma M_z m \left(\frac{1}{R_z+h} - \frac{1}{R_z}\right) = \gamma M_z m \frac{h}{R_z\left(R_z+h\right)} = \underbrace{\gamma \frac{M_z}{R_z^2}}_{=g} \frac{mh}{\left(1+\dfrac{h}{R_z}\right)} = \frac{mgh}{\left(1+\dfrac{h}{R_z}\right)} \tag{31}$$

Ako je $h << R_z$, onda je $h/R_z << 1$, pa se dobija:

$$\boxed{E_p \approx mgh}. \tag{32}$$

Zaključak na osnovu slučajeva a) i b):

Dobijeno je da se vrednost gravitacione potencijalne energije jednog istog tela u jednom istom položaju u gravitacionom polju Zemlje (na rastojanju *r* od centra Zemlje) razlikuje, zavisno od toga gde smo postavili nulti (referentni) nivo za proračun E_p. Međutim, pri rešavanju problema u oblasti dinamike, uvek je zapravo jedino bitna promena (razlika) gravitacione potencijalne energije nekog tela, a ta promena ne zavisi od izbora referentnog nivoa.

Promena gravitacione potencijalne energije tela pri pomeranju tela iz jednog konkretnog položaja u drugi je uvek ista (za data dva položaja), bez obzira na to gde postavimo nulti (referentni) nivo za proračun E_p tela.

Na primer, pri pomeranju tela iz položaja koji se nalazi na visini *h* (u odnosu na površinu Zemlje) u položaj na površini Zemlje, dobijamo:

a) u slučaju da je referentni nivo za proračun E_p postavljen u beskonačnosti:

$$\Delta E_p = E_{p2} - E_{p1} = -\gamma \frac{M_z m}{R_z + h} - \left(-\gamma \frac{M_z m}{R_z}\right) = -\gamma M_z m \left(\frac{1}{R_z+h} - \frac{1}{R_z}\right) = -\gamma M_z m \left(\frac{R_z - \left(R_z+h\right)}{R_z\left(R_z+h\right)}\right) =$$

$$= -\gamma M_z m \left(\frac{-h}{R_z\left(R_z+h\right)}\right) = \gamma M_z m h \left(\frac{1}{R_z\left(R_z+h\right)}\right) = \gamma M_z m h \left(\frac{1}{R_z^2\left(1+\dfrac{h}{R_z}\right)}\right) = \frac{\gamma M_z m}{R_z^2} h \left(\frac{1}{1+\dfrac{h}{R_z}}\right) \tag{33}$$

što se za $h << R_z$ svodi na: $\Delta E_p \approx mgh$.

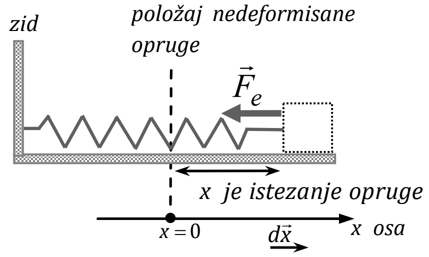
b) u slučaju da je referentni nivo za proračun E_p postavljen na površini Zemlje:

$$\Delta E_p = E_{p2} - E_{p1} = mgh - 0 = mgh. \tag{34}$$

Napomena: Kada se posmatra kretanje onih tela koja se nalaze u blizini površine Zemlje, uglavnom se za gravitacionu potencijalnu energiju tela koristi izraz $E_p = mgh$, koji se dobija ako se nulti nivo za proračun E_p stavi na površinu Zemlje. Međutim, treba primetiti da ovaj izraz važi i ako se za nulti (referentni) nivo ne izabere površina Zemlje, već se izabere nivo na nekoj visini H iznad površine Zemlje, ali tako da je taj nivo paralelan sa tangentnom ravni na površinu Zemlje u datoj tački. Tada veličina h u izrazu $E_p = mgh$ predstavlja visinu na kojoj se telo nalazi, u odnosu na taj novi nivo.

◆ Potencijalna energija elastično deformisane opruge

Sila elastičnosti, koja se javlja npr. pri elastičnoj deformaciji (izduženju ili sabijanju) opruge, je konzervativna sila. Zato je rad sile elastičnosti jednak negativnoj promeni potencijalne energije elastično deformisane opruge. Pošto elastično deformisana opruga ima potencijalnu energiju uzrokovanu tom deformacijom, onda i telo koje je zakačeno za slobodni kraj opruge takođe raspolaže (bar) takvom istom potencijalnom energijom (telo može raspolagati i dodatnom potencijalnom energijom koja potiče od njegovog položaja u gravitacionom polju Zemlje).



Slika 11 – Sila elastičnosti teži da vrati oprugu u nedeformisano stanje. Početak *x* ose je stavljen u položaj nedeformisane opruge, pa *x* izražava elastičnu deformaciju.

Posmatrajmo slučaj tela zakačenog za horizontalnu oprugu, čiji je drugi kraj fiksiran (slika 11). Neka se deformacija opruge vrši duž horizontalnog pravca, tj. duž *x* ose, tako da pri istezanju opruge važi $d\vec{s} = d\vec{x}$. Neka je nulti nivo za potencijalnu energiju postavljen u položaj nedeformisane opruge, a u taj položaj je postavljen i početak *x* ose. Elementarna promena potencijalne energije je jednaka negativnoj vrednosti elementarnog rada sile elastičnosti:

$$dE_{pe} = -dA_e = -\vec{F}_e \cdot d\vec{x} = -\left(-k\,x\,\vec{i}\right)\cdot d\vec{x} = k\,x\,\vec{i} \cdot d\vec{x} = kxdx\cos 0 = kxdx\,. \tag{35}$$

Važi:

$$\Rightarrow \quad \int_0^{E_{pe}} dE_{pe} = k\int_0^x x\,dx \quad \Rightarrow \quad E_{pe} = k\int_0^x x\,dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{E_{pe} = \frac{kx^2}{2}}, \tag{36}$$

gde je *x* elastična deformacija opruge (istezanje ili sabijanje). Potencijalna energija elastično deformisane opruge (E_{pe}) se zove još i energija elstične deformacije opruge, pa se obeležava i sa E_{edef}.

4.3. Kinetička i potencijalna energija sistema od dva ili više tela

Ukoliko posmatramo *sistem koji se sastoji od n tela*[8], onda je za promenu brzina (pa i kinetičkih energija) tih tela potrebno uložiti odgovarajući rad za svako od tih tela. Kinetička energija *sistema tela* kao celine će biti jednaka zbiru kinetičkih energija svih tela u sistemu: $E_k = \sum_{i=1}^{n} E_{ki} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i \upsilon_i^2}{2}$ (kinetička energija je aditivna veličina). Elementarna promena kinetičke energije sistema od *n* tela je jednaka elementarnom radu *rezultante svih unutrašnjih i spoljašnjih sila koje deluju na dati sistem*[9]: $dE_k = dA = \left(dA^{int} + dA^{ex}\right)$.

Integraljenjem poslednjeg izraza, za sistem koji prelazi iz stanja 1 u stanje 2, dobija se:

---

[8] Koristićemo model sistema od *n* materijalnih tačaka, između kojih postoje sile uzajamne interakcije. To su unutrašnje sile za sistem.

[9] Dok je oznaka *ex* izabrana kao neformalna skraćenica za *external*, oznaka *int* je izabrana kao skraćenica za *internal.* Unutrašnje sile za dati sistem su sile interakcije između tela unutar sistema.