

Mašinski fakultet  
Univerziteta u Beogradu  
2014.

**OSNOVE  
MIKROFLUIDIKE I  
NANOFLUIDIKE**

**Nevena D. Stevanović**



Nevena D. Stevanović

**OSNOVE MIKROFLUIDIKE I  
NANOFLUIDIKE**

Prvo izdanje

Mašinski fakultet  
Univerziteta u Beogradu

Beograd, 2014.

# OSNOVE MIKROFLUIDIKE I NANOFLUIDIKE

Prvo izdanje

- Autor:

dr Nevena D. Stevanović, dipl. inž. maš.  
vanredni profesor Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu

- Recenzenti:

dr Đuro Koruga, dipl. inž. maš.  
redovni profesor u penziji Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu

dr Milan Lečić, dipl. inž. maš.  
redovni profesor Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu

- Izdavač:

Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu  
Kraljice Marije 16, 11120 Beograd 35  
tel. (+381 11) 3302-200, faks (+381 11) 3370364

Za izdavača: prof. dr Milorad Milovančević

Štampanje odobrila Komisija za Izdavačku delatnost  
Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu

Urednik: prof. dr Aleksandar Obradović, predsednik Komisija za Izdavačku  
delatnost Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu

- Štampa:

**PLANETA PRINT**

Tiraž: 100 primeraka

ISBN 978-86-7083-847-5

## ***PREDGOVOR***

Predavanja na predmetu Mikro-nano fluidika na modulu za Biomedicinsko inženjerstvo Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu podstakla su nastanak ovog udžbenika.

Od 80-ih godina prošlog veka došlo je do revolucionarnog napretka u nauci koji je omogućio pravljenje izuzetno malih uređaja – mikro-elektro-mehaničkih sistema (MEMS), a kasnije i još manjih – nano-elektro-mehaničkih sistema (NEMS). Prvobitna primena ovih uređaja bila je usmerena na razne oblasti tehnike, a kasnije, 90-tih godina prošlog veka njihova primena se širi na raznolike oblasti kao što su hemija, biologija, biomedicina. Zajedno sa razvojem MEMS-a i NEMS-a intenzivno se razvija i mikro i nanofluidika kao njihov sastavni deo. Fenomeni koji ne dolaze do izražaja u sistemima uobičajenih dimenzija postaju značajni u mikro i nanosistemima i oni se koriste za izvođenje mnogih korisnih procesa.

Ova knjiga je namenjena studentima Master studija i predstavlja teorijsku osnovu za razumevanje fenomena koji se javljaju pri strujanju fluida u mikro i nanosistemima. Upoznavanje i razumevanje teorijske osnove i matematičkih modela pomoću kojih se proračunavaju strujanja fluida u mikro i nanosistemima trebalo bi da omogući praktičnu primenu i dalji istraživački rad budućih studenata doktorskih studija u naučnoj oblasti koja se odnosi na mikro i nanofluidiku.

Osnovu za definisanje matematičkih modela koji opisuju strujanje fluida u mikro i nanosistemima predstavljaju osnovne jednačine mehanike fluida i modeli strujanja fluida definisani klasičnom mehanikom fluida. Uvođenjem određenih specifičnih pojava karakterističnih za strujanje gasova ili za strujanje tečnosti u mikro i nanokanalima, modeli klasične mehanike fluida su nadograđeni i formirani su matematički modeli koji opisuju strujanje fluida u mikro i nanosistemima. Tako je nakon *Uvoda* gde je dat kratak prikaz mogućnosti primene mikro i nanouređaja kao i procena značaja fizičkih veličina u mikro i nanosistemima što objašnjava uzroke koji dovode do fenomena značajnih u mikro i nanofluidici, u drugom poglavlju *Osnovne jednačine i neka tačna analitička rešenja* dat prikaz jednačina kontinuumu koje opisuju strujanje fluida: jednačine kontinuiteta, jednačine količine kretanja, jednačine energije. Osim toga, u ovom poglavlju data su i neka tačna analitička rešenja ovih jednačina koja će u kasnijim poglavljima biti nadograđena uzimanjem u obzir pojava karakterističnih za mikro i nanostrujanja fluida. Tako u trećem poglavlju *Strujanje gasa u mikro i nanokanalima*, rešenja za strujanje gasova se nalaze polazeći od osnovnih jednačina kontinuumu, ali sada korišćenjem graničnog uslova klizanja na zidu i temperaturnog skoka koji dolaze do izražaja pri strujanju gasa u kanalima veoma malih dimenzija. U četvrtom poglavlju *Elektrohidrodinamika* prikazana su neka strujanja fluida u mikro i nanokanalima indukovana postojanjem elektromagnetskog polja. Pri proučavanju ovih elektrokinetičkih fenomena u hidrodinamici, na tečnost ili rastvor koji se nalaze u elektromagnetskom polju deluje osim uobičajenih sila koje se javljaju u klasičnoj mehanici fluida i elektromagnetska sila, pa su u ovom poglavlju dati osnovni zakoni

elektromagnetskog polja koji opisuju i definišu elektromagnetske pojave. U okviru ovog poglavlja posebno su analizirana dva elektrokinetička efekta najčešće prisutna u mikro i nanofluidici – elektroosmoza i elektroforeza. Polazeći od osnovnih zakona hidrodinamike i elektromagnetike dati su matematički modeli koji opisuju strujanje nestišljivog fluida koje se ostvaruju pod dejstvom električnog polja, a takođe i analitička rešenja koja daju zavisnost brzine fluida ili čestice u fluidu od električnog polja. Prikazana rešenja predstavljaju osnovu za razumevanje principa rada i proračun elektroosmotskih pumpi različitih konstrukcija, kao i razumevanje procesa sortiranja ili separacije molekula na principima elektroforeze. U petom poglavlju *Difuzija* date su osnovne jednačine difuzije na čijoj osnovi se u mikro i nanokanalima BioMEMS i BioNEMS uređaja ostvaruje upravljanje i kontrola procesa mešanja i separacije. Za različite početne uslove koji se odnose na prisustvo supstance u fluidu, pri prenosu supstance čistom difuzijom ili difuzijom i advekcijom, prikazana su analitička rešenja koja daju raspodelu supstance u kanalu tokom vremena. S obzirom na to da je u mikro i nanosistemima uticaj površinskih sila u odnosu na zapreminske sile mnogo veći, šesto poglavlje *Kapilarnost u mikro i nanosistemima* bavi se kapilarnim pojavama koje su posledica površinskih sila i tako predstavljaju značajnu klasu problema u mikro i nanofluidici.

Pri izboru modela strujanja fluida autor se rukovodio kriterijumom da se analitička rešenja nalaze relativno jednostavno, bez korišćenja numerike ili nekih posebnih matematičkih metoda.

Ova knjiga nema pretenziju da prikaže sve aspekte mikro i nanofluidike, već da upozna studente sa teorijskim osnovama koje će im omogućiti bolje razumevanje pojava koje se dešavaju pri strujanju fluida u mikro i nanokanalima.

I na kraju, želim da zahvalim akademiku Vladanu Đorđeviću koji je pre mnogo godina naslutio značaj razvoja ove oblasti i uveo me u nju, kao i profesoru Đuri Korugi koji je uočio potrebu da studenti Modula za Biomedicinsko inženjerstvo Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu steknu znanja iz ove oblasti.

U Beogradu, oktobra 2014.

*Autor*

# SADRŽAJ

<b>1</b>	<b>Uvod</b> .....	1
1.1	Primena MEMS-a i NEMS-a.....	4
1.2	Procena značaja fizičkih veličina u mikro i nanosistemima.....	13
1.3	Strujanje fluida u mikro i nanouređajima.....	17
1.3.1	Knudsenov broj i podela strujanja prema stepenu razređenosti gasa.....	18
1.3.2	Modeliranje strujanja fluida.....	19
1.3.2.1	Modeliranje strujanja gasa u MEMS-ima i NEMS-ima.....	21
1.3.2.2	Modeliranje strujanja tečnosti u MEMS-ima i NEMS-ima.....	21
1.3.3	Bolcmanova jednačina.....	22
<b>2</b>	<b>Osnovne jednačine i neka tačna analitička rešenja</b> .....	27
2.1	Zakon održanja mase – jednačina kontinuiteta.....	29
2.2	Zakon održanja impulsa – jednačina količine kretanja.....	31
2.3	Jednačina energije.....	37
2.4	Tačna analitička rešenja.....	41
2.4.1	Izotermno nestišljivo strujanje fluida između paralelnih ploča.....	42
2.4.2	Izotermno stišljivo strujanje fluida između paralelnih ploča.....	44
2.4.3	Neizotermno stišljivo strujanje fluida između paralelnih ploča.....	46
2.4.4	Izotermno Kuetovo strujanje.....	50
2.4.5	Neizotermno stišljivo Kuetovo strujanje.....	51
2.4.6	Izotermno nestišljivo strujanje fluida u ležajima.....	53
2.4.7	Izotermno nestišljivo strujanje fluida kroz cev konstantnog poprečnog preseka.....	56
2.4.8	Izotermno stišljivo strujanje fluida kroz cev konstantnog poprečnog preseka.....	59
<b>3</b>	<b>Strujanje gasa u mikro i nanokanalima</b> .....	63
3.1	Granični uslovi.....	65
3.2	Izotermno strujanje gasova u režimu strujanja sa klizanjem.....	68
3.2.1	Izotermno strujanje gasa u kanalima u režimu klizanja – rešenje tačnosti $O(Kn)$ .....	69
3.2.2	Izotermno strujanje gasa u kanalima u režimu klizanja i početnom	

	delu prelazne oblasti – rešenje tačnosti $O(Kn^2)$ .....	75
3.2.3	Izotermisko strujanje gasa kroz cev u režimu klizanja – rešenje tačnosti $O(Kn)$ .....	79
3.2.4	Izotermisko strujanje gasa kroz cev u režimu klizanja i početnom delu prelazne oblasti – rešenje tačnosti $O(Kn^2)$ .....	83
3.2.5	Izotermisko Kuetovo strujanje gasa u režimu klizanja i početnom delu prelazne oblasti – rešenje tačnosti $O(Kn^2)$ .....	85
3.2.6	Izotermisko strujanje gasa u ležaju u režimu klizanja i početnom delu prelazne oblasti – rešenje tačnosti $O(Kn^2)$ .....	86
3.3	Neizotermisko strujanje gasova u režimu strujanja sa klizanjem.....	96
3.3.1	Neizotermisko strujanje gasa u kanalima u režimu klizanja – rešenje tačnosti $O(Kn)$ .....	96
3.3.2	Neizotermisko Kuetovo strujanje gasa u režimu klizanja – rešenje tačnosti $O(Kn)$ .....	99
<b>4</b>	<b>Elektrohidrodinamika</b> .....	<b>103</b>
4.1	Osnovne jednačine elektromagnetnog polja.....	105
4.1.1	Gausov zakon – zakon električnog fluksa.....	105
4.1.2	Gausov zakon magnetizma - zakon održanja magnetskog fluksa....	107
4.1.3	Faradejev zakon elektromagnetske indukcije.....	107
4.1.4	Uopšteni Amperov zakon.....	108
4.2	Električni dvojni sloj.....	109
4.2.1	Raspodela električnog potencijala u električnom dvojnomo sloju.....	110
4.2.2	Debaj-Hakelova aproksimacija Debajevog sloja.....	112
4.2.2.1	Raspodela električnog potencijala i gustine naelektrisanja oko ravne ploče.....	113
4.2.2.2	Raspodela električnog potencijala i gustine naelektrisanja između dve paralelne ploče.....	113
4.2.2.3	Raspodela električnog potencijala i gustine naelektrisanja u cevi.....	114
4.3	Elektroosmoza.....	115
4.3.1	Elektroosmotsko strujanje između paralelnih ploča.....	115



4.3.2	Elektroosmotsko strujanje u cevi.....	120
4.3.3	Strujanje tečnosti između paralelnih ploča pri elektroosmozi i razlici pritiska između ulaza i izlaza.....	122
4.3.4	Strujanje tečnosti kroz cev pri elektroosmozi i razlici pritiska između ulaza i izlaza.....	127
4.3.5	Višekanalna elektroosmotska pumpa.....	129
4.3.6	Kaskadna elektroosmotska pumpa.....	130
4.4	Elektroforeza.....	132
<b>5</b>	<b>Difuzija</b> .....	<b>135</b>
5.1	Osnovne jednačine difuzije.....	137
5.1.1	Fikov zakon.....	137
5.1.2	Zakon održanja koncentracije.....	138
5.1.3	Procena uticaja pojedinih članova u jednačini difuzije.....	140
5.2	Analitička rešenja.....	141
5.2.1	Difuzija supstance u kanalu malog poprečnog preseka u fluidu koji miruje.....	141
5.2.2	Prenos supstance u kanalu malog poprečnog preseka u fluidu koji se kreće.....	144
5.2.3	Difuzija supstance u kanalu malog poprečnog preseka u fluidu koji miruje, usled početne koncentracije te supstance u delu cevi...	146
5.2.4	Prenos supstance u kanalu malog poprečnog preseka u fluidu koji se kreće, pri početnoj homogenoj koncentraciji te supstance u delu kanala.....	149
5.2.5	Tejlorova disperzija.....	151
5.3	Separacija supstance difuzijom.....	155
<b>6</b>	<b>Kapilarnost u mikro i nanosistemima</b> .....	<b>157</b>
6.1	Površinski naponi.....	159
6.2	Jang-Laplasov model za pad pritiska u razdelnoj površi.....	161
6.3	Ugao kvašenja.....	162
6.4	Ravnotežna visina stuba tečnosti u kapilari.....	164
6.5	Kapilarna pumpa.....	165
	<b>Literatura</b> .....	<b>173</b>



# 1

## **Uvod**



---

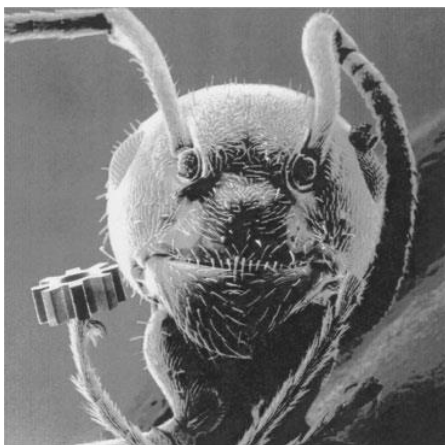
Poznati fizičar Ričard Fejman (Richard Feynman), dobitnik Nobelove nagrade, je 1959-te godine na skupu Američkog društva fizičara održao predavanje pod nazivom "There's Plenty of Room at the Bottom" u kome je nagovestio razvoj nove oblasti fizike koja će se baviti proizvodnjom i upravljanjem malih uređaja. Ta ideja je inspirisana postojanjem malih bioloških sistema koji iako veoma mali poseduju velike mogućnosti: *Ćelije su veoma male, ali su veoma aktivne. One proizvode razne supstance, one se kreću, one se migolje, one rade čitav niz fantastičnih stvari - sve u okviru svojih malih dimenzija. Takođe, u njima se skladište informacije. Treba razmotriti mogućnost da i mi možemo napraviti uređaje koji će raditi šta mi želimo i koji će posedovati sposobnost da manevriše u okviru veoma malih dimenzija.* Tada je ponudio nagradu od 1000 \$ za prvu osobu koja uspe da sadržaj jedne stranice knjige napiše na površini koja je 25000 puta manja, a da se pri tome može čitati uz pomoć elektronskog mikroskopa. Isto tolika nagrada je ponuđena za onoga ko prvi napravi rotacioni elektromotor kojim će se upravljati spolja, a koji će biti manji od kocke čija je dimenzija stranice 0,4mm. Profesor Fejman je tada rekao da očekuje da neće dugo čekati na pobjednika.

Njegova predviđanja su se ostvarila i u poslednjih nekoliko decenija, tačnije od 80-ih godina prošlog veka došlo je do revolucionarnog napretka u nauci koji je omogućio pravljenje izuzetno malih uređaja – mikro-elektro-mehaničkih sistema (MEMS). To su uređaji sastavljeni od električnih i mehaničkih delova čije se veličina uglavnom kreću između  $1\mu\text{m}$  i  $100\mu\text{m}$ . U mikro-elektro-mehaničke sisteme spadaju i jednostavni uređaji bez pokretnih delova, a takođe i veoma složeni elektromehanički sistemi sa više pokretnih elemenata čije kretanje kontroliše integrisana mikroelektronika. Prvobitna primena ovih uređaja bila je usmerena na razne oblasti tehnike, a kasnije, 90-tih godina prošlog veka njihova primena se širi na veoma raznolike oblasti kao što su hemija, biologija, biomedicina. Osim toga, proces minijaturizacije je nastavljen što je dovelo do mogućnosti izrade još manjih uređaja, nano-elektro-mehaničkih sistema (NEMS), sastavljenih od komponenti čije su dimenzije veličine reda 1-100nm.

Za čoveka je pravljenje izuzetno velikih objekata i izrazito malih predmeta oduvek bio izazov. Tako je još u 26-tom veku pre nove ere izgrađena Keopsova piramida visoka 146 m. Mnogo godina kasnije, 1931. godine izgrađen je Empajer stejt bilding (Empire State Building) čija je visina 449 m. Danas najviša zgrada na svetu je "Toranj Kalifa" (Burj Khalifa) napravljena 2010. godine u Dubaiju visoka 829 m. S obzirom na to da je od izgradnje piramida do izgradnje tornja u Dubaiju prošlo 46 vekova, a da je on samo 6 puta veća od piramida, moglo bi se zaključiti da u pravljenju velikih objekata nije došlo do revolucionarnog napretka. Sa druge strane čovek je osvajao i čudesni svet malih stvari. Moglo bi se reći da je jedan od prvih malih predmeta koje je čovek pravio bio kovani novac. U 13-tom veku nastali su prvi časovnici i to bi se moglo smatrati početkom minijaturizacije, što je dovelo do izrade prvog ručnog sata 1868. godine. Otkriće mikroskopa u 17-tom veku omogućilo je posmatranje do tad nevidljivog sveta ćelija, bakterija, protoka krvi u kapilarama, Braunovog kretanja,... Jedno od najznačajnijih izuma u istoriji čovečanstva je otkriće tranzistora 1947. godine. Za ovaj izum naučnici Vilijam Šokli (William Shockley), Džon Bardin (John Bardeen) i Valter Bretej (Walter Brattain) dobili se Nobelovu nagradu. Tada je veličina tranzistora bila veličine dlana, a danas

najmanji tranzistor koji se ugrađuje u čipove je veličine 32nm. Otkriće tranzistora vodilo je razvoju mikroelektronike i integrisanih kola, a kasnije i proizvodnji mikro-elektro-mehaničkih sistema (MEMS) i nano-elektro-mehaničkih sistema (NEMS).

Da bi se stekao utisak koliko su mikro-elektro-mehanički sistemi minijaturni, na slici 1.1 prikazan je mrav koji nosi mikrozapčanic prečnika oko 100 $\mu$ m.



**Slika 1.1** Mikrozapčanic u „rukama“ mrava

### 1.1 Primena MEMS-a i NEMS-a

Mikro-elektro-mehanički-sistemi i nano-elektro-mehanički-sistemi su uređaji sačinjeni od senzora, aktuatora, mehaničkih elemenata, i elektronskih komponenti koji se nalaze na zajedničkoj podlozi od poluprovodnika kao što je silicijum, platina, litijum, tantalijum i polimeri polietilen, polikarbonat, polidimetilsiloksan (PDMS), polimetilmetakrilat (PMMA). Kako se proizvodnja MEMS-a i NEMS-a uglavnom bazira na tehnologiji integrisanih kola, najčešće se koristi silicijum zbog široke primene ovog materijala u proizvodnji integrisanih elektronskih kola. Najnovije tehnologije za proizvodnju MEMS-a i NEMS-a koriste karbonske materijale, tačnije njegove alotropske modifikacije kao što je dijamant, ugljenične nano cevi i grafen.

Senzori i aktuatori pretvaraju energiju iz jednog oblika u drugi, pa je zajednički naziv za senzore i aktuatore pretvarač. Senzori su uređaji koji pretvaraju merene fizičke veličine u signal koji je pogodan za dalju obradu, najčešće u električni signal. Zavisno od vrste ulaznog neelektričnog signala postoje termički, elektromagnetni, optički, akustički, hemijski, biomedicinski, senzori jonskog zračenja, mehanički kao što je pritisni i inercijalni, itd. Za razliku od senzora, koji za izlaz imaju uglavnom električni signal, aktuatori su pretvarači najčešće električne energije u mehanički rad. S obzirom na vrstu energije koja se u njima može transformisati u mehanički rad, osim električni, aktuatori mogu biti i hidraulični, pneumatski, termički i mehanički. Tehnološki razvoj omogućio je proizvodnju različitih aktuatora koji su sastavni deo mikro i nano-elektro-mehaničkih sistemima:

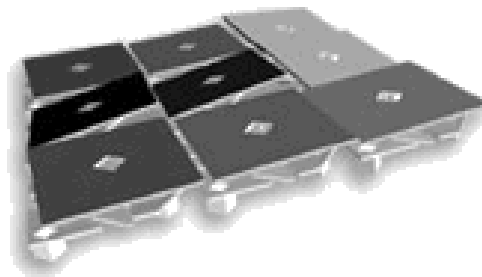
elektromagnetni mikromotori, reduktori, sistemi za pozicioniranje (roboti za upravljanje poluprovodnicima i optičkim vlaknima, manipulisanje ćelijama i aparatima u medicini i biologiji), mikroskeneri, mikroventili, mikropumpe, prekidači itd.

Mikro i nano uređaji imaju značajne prednosti u odnosu na odgovarajuće sisteme makroskopskih dimenzija:

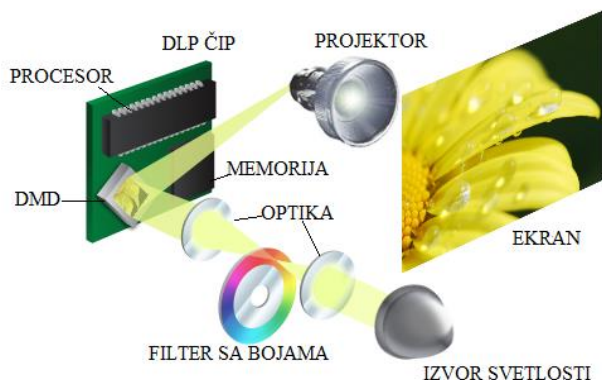
- manja dimenzija i manja masa ovih uređaja omogućava laku prenosivost i primenu u slučajevima kada je veoma značajno da zauzimaju malo prostora;
- veća preciznost ovih uređaja;
- manja cena je rezultat serijske proizvodnje MEMS-a i NEMS-a korišćenjem tehnike koju je razvila mikroelektronska industrija;
- komponente MEMS-a i NEMS-a su jednostavne za ugradnju i zamenu, pa su ovi minijturni sistemi fleksibilni jer ih je lako menjati.
- mikro i nano sistemi imaju visoku rezonantnu frekvencu koja je uglavnom iznad frekventnih opsega većine mašina i uređaja. To je posledica male mase koja je obrnuto proporcionalna rezonantnoj frekvenci sistema.

Mogućnost primene mikro i nano elektro mehaničkih sistema u raznim oblastima je velika. U kućama, stanovima ili poslovnim prostorima mogu se napraviti inteligentne sredine u kojima bi se pomoću MEMS-a kontrolisali osvetljenje, temperatura, vlažnost i ljudsko prisustvo što dovodi do smanjenja potrošnje energije i veće udobnosti. Osim toga mikrosenzori i mikroaktuatori nalaze se u skoro svim kućnim uređajima kao što su mašine za pranje, usisivači, šporeti, video uređaji, ink-džet (енгл. *ink-jet*) štampači...

Rad savremenih projektorasasniva se na DLP (Digital Light Processing) tehnologiji koja za proces spajanja slike i svetlosti koristi mikro-elektro-mehaničke sisteme. To su u ovom slučaju pokretna digitalna mikroogledala DMD (Digital Mirror Device) (slika 1.2) koja imaju ulogu mikroaktuatora. Na slici 1.3 prikazan je princip rada DLP tehnologije čiji su sastavni deo aktuatori u obliku digitalnih mikroogledala. Ogledala reaguju na električni signal (napon) promenom ugla mikroogledala, usmeravajući snop svetlosti u željenom pravcu na željeni deo sočiva. Projektor može sadržati od osamsto do preko milion mikroogledala površine oko  $1/16\text{mm}^2$ , pri čemu je svako ogledalo nezavisno od ostalih ogledala u sistemu.

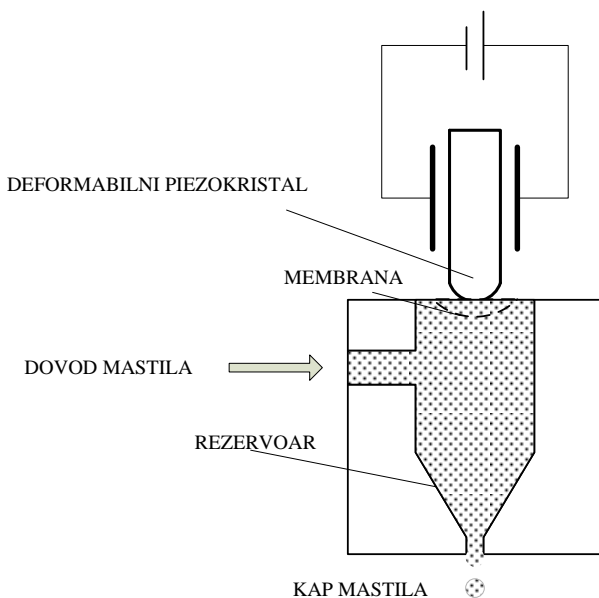


**Slika 1.2** Pokretna digitalna mikroogledala DMD (Digital Mirror Device)



**Slika 1.3** Rad savremenih projektorra zasniva se na DLP (Digital Light Processing) tehnologiji

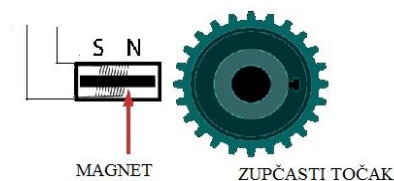
Prvi proizvod koji je komercijalizovan a koristi MEMS-e je ink-džet štampač koji sadrži snop paralelno vezanih mikromlaznica iz kojih se raspršuje mastilo. U glavi štampača nalazi se mikroaktuator u obliku piezokristala koji se širi u zavisnosti od jačine električnog signala i tako deformiše membranu čime se menja pritisak u rezervoaru u kome se nalazi mastilo. To dovodi do isticanja mastila iz rezervoara u vidu kapljice U svakoj sekundi nastaje oko 50000 kapljica.



**Slika 1.4** Piezoelektrični aktuator u ink-džet štampaču



U automobile se ugrađuje veliki broj mikrosenzora i mikroaktuatora čime se postiže povećanje pouzdanosti vozila i smanjenje potrošnje goriva. Mikro-elektromehanički sistemi koji se ugrađuju u automobile kontrolišu temperaturu u kabini, pritisak ulja, pritisak goriva, mere brzinu, ubrzanje, pritisak u gumama i klima uređajima, količinu izduvnih gasova, ... ABS (Anti-lock Braking System) sistem kočenja koji sprečava blokiranje točkova i tako skraćuje zaustavni put vozila koristi senzore koji registruju brzinu okretanja točkova. Na slici 1.5 prikazan je elektromagnetni senzor broja obrtaja. Okretanjem točka sa zupčanicima magnet se pokreće čime se indukuje struja u kalemu. Manji broj obrtaja dovodi do manjeg napona. U trenutku kada se točak zaustavi, aktivira se senzor koji preko sistema elektromagnetnih ventila snižava pritisak ulja u kočionom cilindru, sve dok se kočioni moment toliko ne smanji da se točkovi ponovo počnu okretati.



**Slika 1.5** Elektromagnetni senzor broja obrtaja točkova kao deo ABS sistema

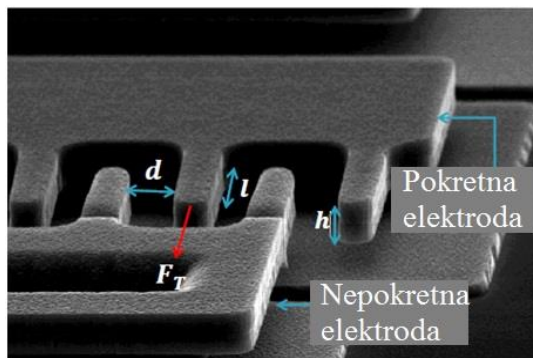
Mikroakcelometri, kao senzori za detekciju promene ubrzanja, pri sudaru aktiviraju vazdušne jastuke u vozilu. Oni najčešće rade na principu detekcije promene kapacitivnosti u elektro statičkom češlju. Usled ubrzanja, tj. usled dejstva inercijalnih sila dolazi do promene položaja zubaca češlja prikazanog na slici 1.6. Ako se pretpostavi da je poprečno rastojanje  $d$  između zubaca fiksirano, promena položaja zubaca se tada manifestuje samo u promeni njihovog preklapanja  $l$ . To dovodi do promene kapacitivnosti od početne vrednosti  $C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{hl}{d}$  na

$C = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{h(l+x)}{d}$ , gde je  $\varepsilon_0$  permitivnost vakuuma,  $\varepsilon_r$  relativna permitivnost sredine,  $h$  visina zubaca,  $l$  početno preklapanje zubaca,  $d$  rastojanje između njih.

Kako je promena kapacitivnosti sa promenom pozicije zubaca  $\frac{dC}{dx} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{h}{d}$  i sila

koja je dovela do promene kapacitivnosti  $F_t = \frac{1}{2} U^2 \frac{dC}{dx}$ , sledi da je  $F_t = \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{h}{2d} U^2$ .

Tako promena sile direktno dovodi do promene napona. Kada sila pri sudaru dostigne kritičnu vrednost, napon u elektrostatičkom češlju takođe doseže kritičnu vrednost pri kojoj se pokreće mehanizam koji aktivira vazdušni jastuk. Taj mehanizam koji pokreće vazdušni jastuk je zapravo mikroaktuator koji radi na istom principu elektrostatičkog češlja, sa tom razlikom što se u njemu promena napona pretvara u silu koja pokreće neki sistem. Elektrostatički mikročešalj koristi se kao mikroaktuator za pogon mikromotora pumpe u mikro i nano fluidici, što nalazi primenu u sistemima za ubrizgavanje lekova ili za hlađenje mikroprocesora.



Slika 1.6 Elektro statički češalj

Ako rastojanje između zubaca nije nepromenljivo, u pravcu normale na zubce češlja javlja se normalna sila koja je proporcionalna površini preklapanja zubaca  $hl$ , a obrnuto proporcionalna kvadratu rastojanja između njih.

Kako su nano i mikro-elektro-mehanički-sistemi veoma mali uređaji visoke osetljivosti i preciznosti često se koriste u biotehnologiji i medicini. Prisutni su u ulozi mikroaktuatora kao mikropumpe, hvataljke, brizgaljke, grejači, a u ulozi senzora kao detektori pritiska, kretanja, ubrzanja, električnih signala (slika 1.7), jona, bioloških agenasa. Bio-MEMS-i i Bio-NEMS-i se razvijaju u cilju primene u otkrivanju, analizi, dijagnostici i terapiji raznih oboljenja, dostavi lekova i kao i u cilju analize ćelija.

U krvotoku čoveka postoji stalna razlika pritiska u pojedinim njegovim delovima, a takođe i neprekidna promena pritiska usled periodičnih srčanih radnji. U cilju praćenja pritiska u organizmu razvijena je tehnologija izrade bežičnih senzora koji povećavaju kvalitet medicinskog lečenja. Slika 1.8 ilustruje minijaturnost dva



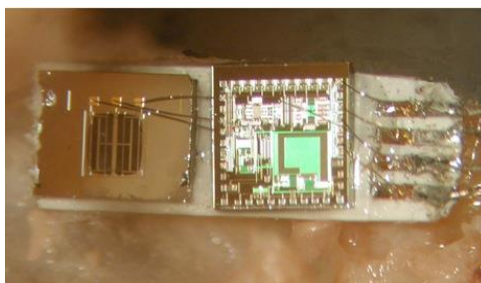
Slika 1.7 MEMS implant za praćenje elektrokardiograma (EKG-a)



**Slika 1.8** Dva mikrosenzori za merenje pritiska (Integrate Sensing Systems Inc.)

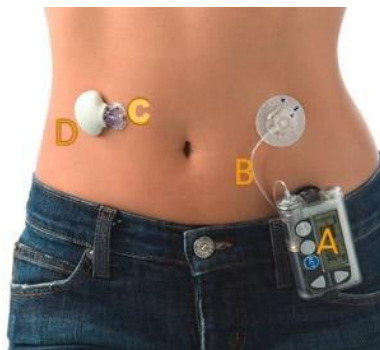
mikrosenzora za merenje pritiska. Najčešće se princip rada ovih mikrosenzora bazira na merenju deformacije fleksibilne dijafragme koja je njegov sastavni deo. Koriste se za merenje promene pritiska u srčanim zaliscima radi procene njihovog stanja, za merenje pritiska u abdominalnoj aorti, očnog pritiska, međupršljenskog pritiska, za praćenje i dijagnostiku srčane insuficijencije, za merenje pritiska u hidrocefalusu, za dijagnostiku uroloških oboljenja, za kontrolu rasprostiranja lekova infuzijom. Osim toga, sićušni senzori pritiska ugrađuju se i na vrhove katetera.

MEMS-i se ugrađuju i u slušne aparate. Istraživači sa Univerziteta u Juti su razvili MEMS mikrofon koji se može implantirati u srednjem uhu (slika 1.9). Osnovna prednost ovog uređaja je što nema spoljne elemente, a pri tome je veoma efikasan i dovodi do značajnih poboljšanja u kvalitetu zvuka.

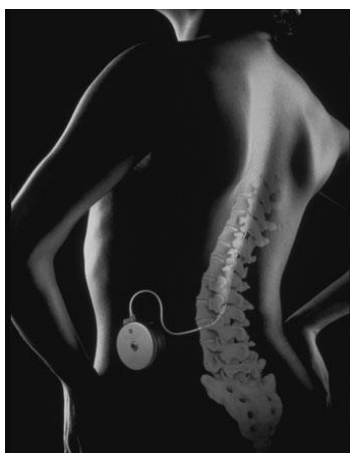


**Slika 1.9** Implatabilni slušni MEMS aparat

Mikropumpe se koriste za kontinualno ubrizgavanje leka. Primenjuju se za ubrizgavanje insulina u jetru (slika 1.10) i leka u cerebrospinalnu tečnost (likvor) u kičmenoj moždini u slučaju povrede (lezije) kičmene moždine (slika 1.11). Za razliku od prvog slučaja gde se elementi uređaja ne ugrađuju u organizam, u drugom slučaju mikropumpa je implantirana u predelu stomaka i kateterom povezana sa zonom koja se tretira. Oba vida terapije obezbeđuju stalan nivo leka u organizmu i samim tim bolje efekte u odnosu na oralnu upotrebu leka.



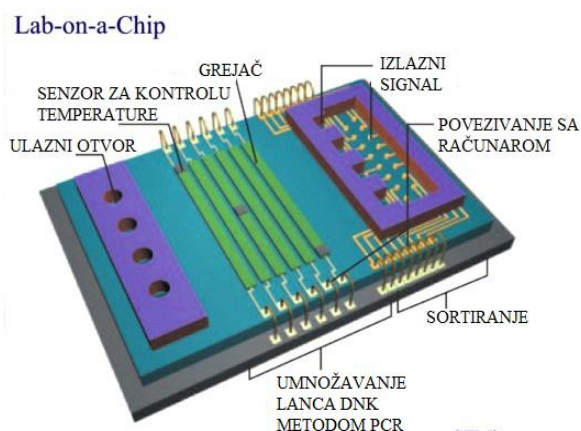
**Slika 1.10** Primena insulinske mikro pumpe. Hemijski senzor (C) meri nivo glukoze u krvi i odašiljačem (D) šalje rezultat merenja u kompjuter (A) u čijem sastavu se nalazi mikropumppa koja šalje precizno određenu količinu insulina kanulom (B) pacijentu



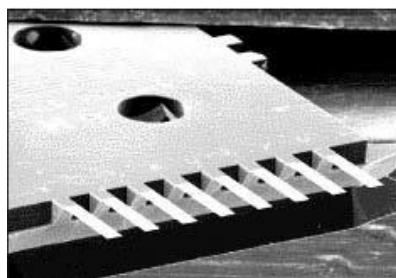
**Slika 1.11** Mikro pumpa implantirana kod pacijenta za ubrizgavanje leka u cerebrospinalnu tečnost u kičmenoj moždini u slučaju povrede kičmene moždine

Laboratorije na čipu (lab-on-a-chip, LOC) su uređaji koji integrišu više laboratorijskih procesa na jednom čipu čija je veličina reda nekoliko kvadratnih milimetara. Kako su dimenzije ovih laboratorija male tako su i uzorci sa kojima rade veoma mali, manji od  $10^{-12}$ l, pa je i manja potrošnja reagenasa. U ovim uređajima zbog malih dimenzija, a samim tim i bržeg zagrevanja i difuzije, brža je i analiza. Troškovi izrade ovih uređaja su niži u odnosu na klasične laboratorije, pa je moguća i jednokratna upotreba. Ovi uređaji su u stanju da detektuju određene biomolekule, da transportuju i mešaju uzorke, da vrše separaciju, a takođe i da sprovode analizu genoma. Na slici 1.12 prikazan je LOC uređaj za detekciju određenog DNK lanca koji se koristi u cilju dijagnostike genetske bolesti. Uzorak krvi koja se analizira uglavnom je mali i ne sadrži dovoljno DNK materijala potrebnog za analizu. U LOC uređaju se može kopiranjem produžiti lanac DNK procesom PCR (polimer chain reaction). U BioMEMS PCR amplifikatoru se za 15 minuta obavi produženje lanca

DNK za koji je inače potrebno 1 do 2 dana. Uzorak DNK pomešan sa enzimom polimeraze se nanosi na ulazne otvore uređaja koji se mikrokanalima formiranim u silikonskoj osnovi vode do dela gde se vrši amplifikacija lanca DNK metodom PCR. Kako se ovaj proces obavlja pri tačno određenim temperaturnim uslovima u mikrokanale su ugrađeni grejači u obliku otpornika postavljeni tako da obezbeđuju tri temperature na tačno određenim pozicijama mikrokanala. Nakon amplifikacije mikropumpa transportuje produžni lanac DNK u oblast gde se vrši prepoznavanje određenog fragmenta DNK. Detektor je silikonska pločica sa konzolama po obodu na kojima se nalazi uzorak DNK koji se traži, a za njega se vezuju isti delovi DNK iz uzorka koji se analizira. Dužina lanca na svakoj konzoli (slika 1.13) se utvđuje na osnovu napona koji je različit za različite dužine, pri čemu svaka konzola može biti zadužena za drugu vrstu uzorka. Na ovom principu rade i mikroseparatori za razdvajanje bioloških ćelija.



**Slika 1.12** LOC uređaj za detekciju određenog lanca DNK



**Slika 1.13** Silikonska pločica sa konzolama za detekciju DNK ili bioloških ćelija

Na slici 1.14 prikazan je jedan komercijalni uređaj koji na osnovu kapi krvi pacijenta pokazuje da li je nastupio srčani udar. Test se bazira na principu detekcije C reaktivnog proteina koji nastaje u krvi u momentu kada nastupi srčani udar. Zahvaljujući kapilarnim efektima karakterističnim za mikro i nanostrujanja fluida,

kap krvi pacijenta se kreće u smeru strelice do mikroseparatora gde se vrši izdvajanje C reaktivnog proteina, a zatim se rezultati analize obrađuju na mikrokompjuteru. Dovoljno je 15 minuta da se pomoću ovog uređaja utvrdi da li je kod pacijenta nastupio srčani udar.

Na slici 1.15 prikazan je uređaj koji može da genotipuje, tj. da identifikuje npr. viruse na osnovu karakteričtine sekvence gena. On se sastoji od mreže mikrokanaala i koristi kapilarnu elektro hromatografiju kao tehniku separacije. Potrebna zapremina uzorka je svega 1 $\mu$ l, a potrebno je samo 10 minuta za dobijanje rezultata.



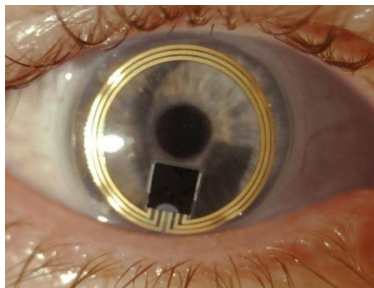
**Slika 1.14** Uređaj za detekciju reaktivnog proetina C



**Slika 1.15** Uređaj za identifikaciju tražene genetske sekvence

Primenom tehnologije MEMS-a napravljeno je sočivo za rano dijagnostikovanje glaukoma (slika 1.16). Glaukom je progresivna i veoma rasprostranjena bolest koja ako se ne otkrije na vreme i adekvatno ne leči, neminovno dovodi do slepila. Ova bolest nastaje kao posledica visokog ili nestabilnog očnog pritiska. Klasična kontrola očnog pritiska podrazumeva njegovo jednokratno merenje kod lekara, ali to nije dovoljno pouzdano jer se ovaj pritisak neprekidno menja u toku dana. U cilju kontinualnog merenja očnog pritiska napravljen je MEMS uređaj u obliku kontaktnog sočiva koje sadrži antenu (tri zlatna

prstena), senzor (srebrni prsten na spoljašnjoj ivici oka) i mikroprocesor (pločica oblika kvadrata stranice 2 milimetra i debljine 50 mikrona). Senzor meri deformaciju krivine rožnjače koja se menja sa promenom pritiska i tu informaciju pretvara u električni signal koji pomoću antene šalje na obradu.



**Slika 1.16** Sočivo sa MEMS elementima za merenje očnog pritiska

Razvoj MEMS-a i NEMS-a doveo je do razvoja mnogih oblasti nauke i tehnike. Prisustvo strujanja fluida u ovim uređajima podstaklo je razvoj mikro i nanofluidike. U ovoj knjizi biće prikazani i analizirani neki modeli strujanja fluida koji se sreću u ovim uređajima. Pokazaće se da fenomeni koji ne dolaze do izražaja u sistemima uobičajenih dimenzija postaju značajni na mikro i nanonivou i koriste se za izvođenje mnogih korisnih procesa. Tako, osim što je za proizvodnju MEMS-a i NEMS-a potrebno malo sirovina i manje energije za rad, u njima je moguće izvršiti i posebne procedure koje nije moguće ostvariti u makrosistemima.

## 1.2 Procena značaja fizičkih veličina u mikro i nanosistemima

Dimenzije atoma su reda veličine angstrema ( $1\text{\AA}=0,1\text{nm}=10^{-10}\text{m}$ ). Molekul se sastoji od više istih ili različitih atoma, pa dužina molekula može biti i reda veličine metra, ali i pored toga ni jedan molekul nije vidljiv golim okom jer se njegova poprečna dimenzija kreće između  $0,1\text{nm}$  i  $100\text{nm}$ . Dužina slobodnog puta molekula gasa na standardnim uslovima je reda veličine  $10^{-8}\text{m}$ , a domen delovanja sile između molekula je reda veličine nanometra. S obzirom na ove činjenice, u nanosistemima se sigurno ne mogu zanemariti dešavanja na molekularnom nivou jer je u tom slučaju dimenzija molekula istog reda veličine kao i sam sistem. Dimenzije mikrosistema su znatno veće u odnosu na dimenzije karakteristične za molekularni nivo ( $\mu\text{m}/\text{nm}=10^3$ ), ali taj odnos je mnogo puta manji u odnosu na relaciju između dimenzija makroskopskih sistema i karakterističnih dimenzija na molekularnom nivou ( $\text{m}/\text{nm}=10^9$ ). Ovi argumenti nagoveštavaju da bi mogli da postoje fenomeni karakteristični za mikro i nanosisteme tj. da postoji razlika između fizike sistema uobičajenih dimenzija i mikro i nanosistema. Tako pri strujanju fluida u mikro i nanokanalima brzina i temperatura fluida na zidu kanala nije uvek jednaka brzini i temperaturi kanala, već dolazi do klizanja i temperaturnog skoka u odnosu

na uslove na zidu. U mikro i nanosistemima proučavanje kretanja molekula DNK ili molekula nekih velikih proteina mora da ima individualni pristup. Osim toga u našem "običnom" svetu pri analizi sila koje deluju na neki sistem ne može se zaobići uticaj gravitacione sile, a u nano i mikrosistemima ona je zanemarljivo značaja.

Kao što je već rečeno, u nano i mikrosvetu sile između atoma i molekula dolaze do izražaja. Priroda sile između njih je veoma složena, a teorija koja je objašnjava ukazuje na postojanje intramolekularnih i intermolekularnih sila. Intramolekularne sile su posledica kovalentne veze između atoma nemetala koja nastaje stvaranjem njihovih zajedničkih elektronskih parova. Intermolekularne sile su su privlačne i odbojne sile između atoma, molekula i jona. Pojednostavljeno, može se reći da su one posledica nesimetrične raspodele elektrona u orbiti molekula. Tako, iako je molekul kao celina elektroneutralan, u nekom momentu jedna strana molekula ima veću gustinu elektrona koja privlači pozitivno jezgro drugog molekula. Precizno tumačenje teorije intermolekularnih sila bazira se na kvantnoj mehanici, ali na jednostavan način uticaj molekula jednih na druge se matematički opisuje Lenard-Džonsonovim (Lennard-Jones) potencijalom u kojem je ukupni potencijal međudelovanja prikazan zbirom potencijala odbojne i privlačne sile:

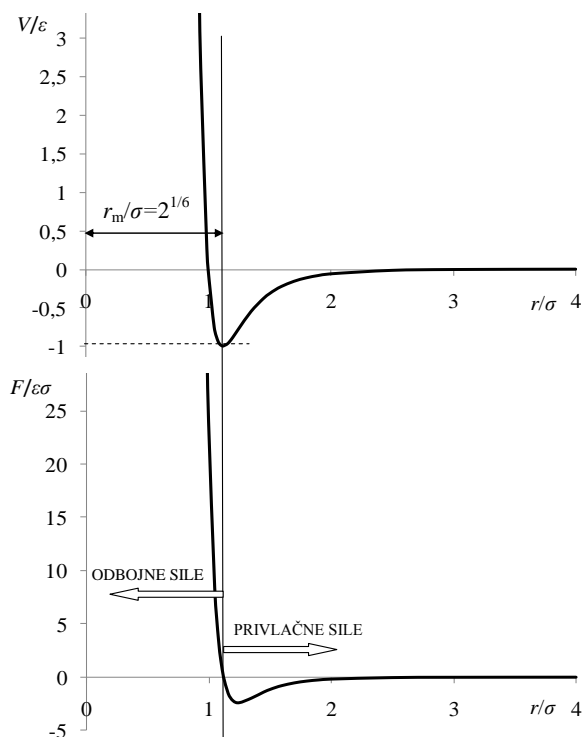
$$V(r) = 4\varepsilon \left[ \left( \frac{\sigma}{r} \right)^{12} - \left( \frac{\sigma}{r} \right)^6 \right], \quad (1.1)$$

gde  $\varepsilon$  predstavlja dubinu potencijalne jame ili minimalnu vrednost potencijala, a  $\sigma$  rastojanje između molekula pri kom je potencijal između njih 0. Potencijal međumolekularne sile zavisi od rastojanja  $r$  između molekula, pri čemu negativni član ovog izraza predstavlja potencijal privlačne sile, a pozitivni član potencijal odbojne sile između molekula. Rastojanje između molekula pri kome potencijal ima minimum definisano je kao  $r_m = 2^{1/6} \sigma$ . Parametri  $\varepsilon$  i  $\sigma$  su empirijski određeni i zavise od vrste molekula. Na primer, za helijum je  $\sigma = 2,58 \cdot 10^{-10} \text{ m}$ ,  $\varepsilon/k_b = 10,22 \text{ K}$ , gde je  $k_b = 1,38065 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$  Bolcmanova (Boltzmann) konstanta, pa je  $\varepsilon = 1,411 \cdot 10^{-22} \text{ J}$ . Na slici 1.17 prikazana je promena Lenard-Džonsonovog potencijala sa promenom rastojanja između molekula u bezdimenzijskom obliku. Sila između molekula je negativni izvod potencijala, pa je:

$$F(r) = -\frac{dV(r)}{dr} = 24\varepsilon \left[ 2 \left( \frac{\sigma^{12}}{r^{13}} \right) - \left( \frac{\sigma^6}{r^7} \right) \right]. \quad (1.2)$$

Za tečnosti i gasove može se sa dovoljnom tačnošću usvojiti da je  $F(r) \approx -24\varepsilon \sigma^6 / r^7$  i pokazati da se sila između molekula oseća na rastojanju koje je reda veličine nm. Za razliku od međumolekularne sile koja je obrnuto srazmerna sedmom stepenu rastojanja između molekula, intenzitet sile između molekula i površi obrnuto je proporcionalan petom stepenu rastojanja između njih  $F(r) \approx 1/r^5$ , a intenzitet sile između dve paralelne površi obrnuto je proporcionalan trećem stepenu rastojanja između njih  $F(r) \approx 1/r^3$ . Međumolekularna sila između dve paralelne ravni koje se nalaze na rastojanju  $r$  određuje se na sledeći način:





**Slika 1.17** Zavisnost Lenard-Džonsonovog potencijala i sile između molekula od rastojanja između njih

$$F(r) = -\frac{A}{6\pi r^3}, \quad (1.3)$$

gde je  $A$  Hamakerova (Hamaker) konstanta. Vrednosti ove konstante za neke materijale date su u tabeli 1.1. Kada su površi od različitog materijala Hamakerova konstanta može se približno odrediti kao  $A \approx \sqrt{A_1 A_2}$ . Sila između dve paralelne površi oseća se na rastojanju reda veličine nekoliko desetina nm.

**Tabela 1.1** Hamakerova konstanta za neke materijale

Materijal	Hamakerova konstanta $A(10^{-21}\text{J})$
Voda	37
Hidrokarbon	50
Mica (Aluminosilicate)	135
Silikon	260-275
Srebro	340
Zlato	455

Energija potrebna da se paralelne ravni razdvoje i dovedu na rastojanje  $R$  nalazi se kao rad međumolekularnih sila:

$$E = \int_0^R -\frac{A}{6\pi r^3} dr = -\frac{A}{12\pi R^2}. \quad (1.4)$$

Tako se može odrediti energija  $E_0$  potrebna da se paralelne ravni dovedu na rastojanje  $R_0$  kada su međumolekularne privlačne i odbojne sile jednake, tj. sila između dve površi jednaka nuli:

$$E_0 = \frac{A}{12\pi R_0^2} = 2\gamma, \quad (1.5)$$

gde je  $\gamma$  [Pa/m<sup>2</sup>] jedinični površinski napon koji se javlja između dve površi.

Na osnovu analize izraza za određivanje sile između molekula, između molekula i površi i sile između dve paralelne površi, može se zaključiti da su te sile obrnuto srazmerne sedmom, petom i trećem stepenu karakteristične dužine. Sa druge strane zapremina, masa, zapreminske sile kao što je gravitaciona, su srazmerne trećem stepenu karakteristične dužine, a površina i površinske sile drugom stepenu. Ako je  $l$  karakteristična dimenzija sistema tada je srazmera pojedinih fizičkih veličina sa njom prikazana u tabeli 1.2. Na osnovu ove tabele može se izvršiti poređenje uticaja neke veličine za dva sistema različitih dimenzija ili procena povećanja ili smanjenja uticaja neke veličine sa promenom veličine posmatranog sistema. Tako je promena uticaja sile između molekula u sistemu karakteristične dimenzije reda veličine  $\mu\text{m}$  u odnosu na sistem čije su karakteristične dimenzije reda veličine  $\text{m}$   $F_{l=\mu\text{m}}/F_{l=\text{m}} \sim (10^{-6}\text{m})^{-7}/(1\text{m})^{-7} = 10^{42}$ , što znači da će uticaj ove sile biti veći  $10^{42}$  puta ako se dimenzija sistema umanji  $10^6$  puta. Osim toga, može se i analizirati značaj različitih veličina u sistemima različitih dimenzija. Procena promene uticaja različitih veličina za dva sistema različitih karakterističnih dimenzija može se ilustrovati primerom koji pokazuje značaj površinskih i zapreminskih sila u sistemima različitih dimenzija. U referentnom sistemu karakterističnih dimenzija reda veličine  $\text{m}$ , odnos površinske i zapreminske sile je  $(F_A/F_V)_{l=\text{m}} \sim (1\text{m})^2/(1\text{m})^3 = 1\text{m}^2/\text{m}^3$ , a u sistemu karakteristične dimenzije  $\mu\text{m}$

$$(F_A/F_V)_{l=\mu\text{m}} \sim (10^{-6}\text{m})^2/(10^{-6}\text{m})^3 = 10^6\text{m}^2/\text{m}^3, \text{ pa je } \frac{(F_A/F_V)_{l=\mu\text{m}}}{(F_A/F_V)_{l=\text{m}}} = 10^6. \text{ To znači da}$$

je uticaj površinskih u odnosu na zapreminske sile  $10^6$  puta veći kada se dimenzija sistema umanji  $10^6$  puta, tj. smanjivanjem dimenzije sistema površinski efekti postaju dominantni u odnosu na zapreminske ili masene. U tabeli 1.3 prikazan je odnos površine i zapremine za sisteme različitih karakterističnih dimenzija. Značaj površinskih efekata u odnosu na zapreminske u sistemima malih dimenzija može se ilustrovati sledećim primerom. Ako iz posude karakterističnih dimenzija reda veličine decimetra prospemo vodu, voda bi se razlila po stolu, a zatim slivala sa njega. Ako bi dimenzija posude bila 100 puta manja, veličine milimetra, površinski napon bi prosutu vodu formirao u kapljicu koja bi se prilepila uz površinu stola. Ako bi još 100 puta smanjili dimenziju posude, tj. ako bi ona bila reda veličine mikrometra, pri prosipanju bi se najverovatnije desilo da voda iz čaše ispari pre nego

što dođe do površi stola. Očigledno je da u sistemima malih dimenzija dominiraju površinski efekti.

Ako bismo poredili dominaciju između dve sile u mikrosistemu, moglo bi se zaključiti da je dominantnija ona sila koja je u srazmeri sa karakterističnom dimenzijom sistema sa manjim eksponentom. Drugim rečima, što je karakteristična dimenzija sistema manja to su izraženije one fizičke veličine za koje je eksponent uz karakterističnu dimenziju sistema manji.

**Tabela 1.2** Zakon skaliranja za neke fizičke veličine

Veličine	Zakon skaliranja
Međumolekularna sila	$l^{-7}$
Sila između molekula i površi	$l^{-5}$
Sila između dve paralelne površi	$l^{-3}$
Zapremina	$l^3$
Masa	$l^3$
Zapreminska sila (gravitacija)	$l^3$
Površina	$l^2$
Površinska sila	$l^2$
Kapilarna sila	$l$

**Tabela 1.3** Odnos površine i zapremine za sisteme različitih karakterističnih dimenzija

$l \sim 1\text{m}$	$A \sim 1\text{m}^2$	$V \sim 1\text{m}^3$	$A/V \sim 1 \frac{\text{m}^2}{\text{m}^3}$
$l \sim 1\text{mm} = 10^{-3}\text{m}$	$A \sim 1\text{mm}^2 = 10^{-6}\text{m}^2$	$V \sim 1\text{mm}^3 = 10^{-9}\text{m}^3$	$A/V \sim 10^3 \frac{\text{m}^2}{\text{m}^3}$
$l \sim 1\mu\text{m} = 10^{-6}\text{m}$	$A \sim 1\mu\text{m}^2 = 10^{-12}\text{m}^2$	$V \sim 1\mu\text{m}^3 = 10^{-18}\text{m}^3$	$A/V \sim 10^6 \frac{\text{m}^2}{\text{m}^3}$
$l \sim 1\text{nm} = 10^{-9}\text{m}$	$A \sim 1\text{nm}^2 = 10^{-18}\text{m}^2$	$V \sim 1\text{nm}^3 = 10^{-27}\text{m}^3$	$A/V \sim 10^9 \frac{\text{m}^2}{\text{m}^3}$

### 1.3 Strujanje fluida u mikro i nanouredajima

U mikro i nano-elektro-mehaničkim-sistemima često je prisutno strujanje fluida. Rezultati eksperimenata dobijeni za strujanje fluida kroz mikrokanale ukazali su na izvesna odstupanja u odnosu na analitička rešenja dobijena korišćenjem klasičnog načina rešavanja problema u mehanici fluida, tj. primenom teorije kontinuuma. Jedan od primera je činjenica da gradijent pritiska pri strujanju gasa duž mikrokanala nije konstantan ni pri uslovima malog Mahovog broja, a maseni protok je veći od onog koji predviđa klasična mehanika fluida. Da bi se precizno projektovale mikro-elektro-mehanički-sistemi nametnula se potreba za razvojem modela kojim bi se tačno moglo opisati strujanje u mikrokanalima. Koje su to jednačine i granični uslovi kojima bi se opisalo ovo strujanje fluida?

### 1.3.1 Knudsenov broj i podela strujanja prema stepenu razređenosti gasa

Prečnik molekula se definiše kao ono rastojanje između molekula posmatrane materije pri kome Lenard-Džonsonov potencijal ima minimum, pa je  $d = 2^{1/6} \sigma$ . Tako, uzimajući u obzir vrednosti rastojanja između molekula  $\sigma$  pri kom je potencijal između njih nula, pokazuje se da je dimenzija molekula gasa i tečnosti reda veličine angstroma tj.  $10^{-10}$  m. Rastojanje između molekula tečnosti je istog reda veličine kao i prečnik molekula, dok je kod gasova rastojanje između molekula približno 10 puta veće, reda veličine  $10^{-9}$  m. Značajna veličina za gasove koja služi za skaliranje i procenu da li su uslovi strujanja u skladu sa teorijom kontinuuma je srednja dužina slobodnog puta molekula  $\lambda$ . Iz kinetičke teorije gasova sledi da je:

$$\lambda = \frac{k_b T}{\sqrt{2} \pi p d} = \frac{\eta}{p} \sqrt{\frac{\pi R_g T}{2}}, \quad (1.6)$$

gde je  $T$  temperatura gasa,  $p$  pritisak,  $d$  prečnik molekula,  $\eta$  dinamička viskoznost i  $R_g$  gasna konstanta. Karakteristične vrednosti dužine slobodnog puta molekula  $\lambda$  za neke gasove pri normalnim uslovima su date u tabeli 1.4. Odnos dužine slobodnog puta molekula  $\lambda$  i karakteristične dimenzije sistema  $l$  predstavlja Knudsenov (Knudsen) broj:

$$Kn = \frac{\lambda}{h}. \quad (1.7)$$

**Tabela 1.4** Dužine slobodnog puta molekula za neke gasove

Gas	$\lambda$ [nm]	$Kn(l=1\mu\text{m})$	$Kn(l=1\text{nm})$
vazduh	61	0,061	61
azot	60	0,06	60
argon	64	0,064	64
helijum	177	0,177	177

Karakteristična dimenzija za probleme strujanja gasa je prečnik cevi, visina kanala ili neka druga dimenzija karakteristična za geometriju strujnog polja. Strujanje gasova kod kojih vrednost Knudsenovog broja nije zanemarljivo mala ( $Kn > 0,001$ ) tretira se kao strujanje razređenog gasa. Efekat razređenosti dolazi do izražaja pri malim pritiscima (opstrujavanje letilica na velikim visinama ili strujanje gasa u vakuum-uređajima), ali i u mikrokanalima i nanokanalima u kojima se strujanje gasa odvija pri standardnim vrednostima pritiska, ali karakteristična dimenzija sistema je toliko mala da vrednost Knudsenovog broja postaje toliko velika da razmatrani problem prevazilazi okvire teorije kontinuuma. S obzirom na vrednosti dužine slobodnog puta molekula date u tabeli 1.4, može se zaključiti da su one svega nekoliko desetina puta manje u odnosu na karakterističnu dimenziju mikrosistema, a u nano-uređajima dužina slobodnog puta može biti i veća od karakteristične dimenzije kanala, pa teoriju kontinuuma za proučavanje strujanja gasova u mikro i

nanokanalima nije primenljiva. Na ovo ukazuju i vrednosti Knudsenovog broja za dve karakteristične dimenzije kanala ( $l=1\mu\text{m}$  i  $l=1\text{nm}$ ) date u tabeli 1.4.

Vrednost Knudsenovog broja određuje stepen razređenosti materije. U zavisnosti od vrednosti  $Kn$  broja razlikuju se četiri režima, među sobom različita po pristupu u rešavanju problema strujanja fluida:

1.  $Kn \leq 0.001$  - kontinuum,
2.  $0,001 < Kn \leq 0,1$  - strujanje sa klizanjem,
3.  $0,1 < Kn \leq 10$  - prelazna oblast,
4.  $Kn > 10$  - slobodno molekularni režim strujanja.

Ova podela je rezultat empirije, pa u opštem slučaju opseg  $Kn$  brojeva za pojedine oblasti zavisi od uslova strujanja kao što su vrsta fluida, pritisak, dimenzije i oblik mikrokanala, termofizičke karakteristike gasa i sl. Tako neki eksperimenti pokazuju da se režim strujanja sa klizanjem proteže sve do  $Kn = 0,6$ , a prelazna oblast sve do  $Kn = 17$ .

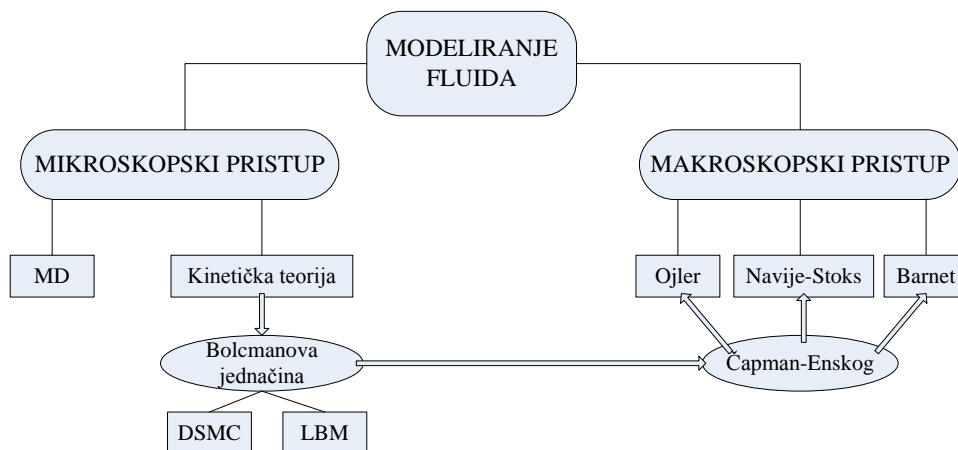
### 1.3.2 Modeliranje strujanja fluida

Strujanje fluida može se modelirati makroskopskim i mikroskopskim pristupom. Šematski prikaz mogućnosti modeliranja fluida dat je na slici 1.18. Makroskopski pristup zasniva se na pretpostavci o kontinuumu materije prema kojoj je ona u svakom trenutku neprekidno raspoređena u prostoru. To znači da u svakoj tački prostora u svakom trenutku vremena postoji prisustvo materije. Zbog toga se fizička svojstva kontinuumu mogu opisati matematički neprekidnim funkcijama što daje mogućnost primene diferencijalnog i integralnog računa. Tečnosti i gasovi na normalnim uslovima kada je  $Kn \leq 0.001$  zadovoljavaju pretpostavke kontinuumu i strujanje fluida se tada definiše jednačinama kontinuumu. U opštem slučaju to su: jednačina kontinuiteta, jednačina količine kretanja i jednačina energije. Jednačine količine kretanja u okviru teorije kontinuumu su: Ojlerova (Euler), Navije-Stoksova (Navier-Stokes) i Barnetova (Burnett) jednačina. Ovo su nelinearne diferencijalne jednačine i opšte rešenje za strujanje fluida ne postoji. Međutim za određene uslove strujanja jednačine se mogu pojednostaviti i u nekim slučajevima moguće je odrediti tačno analitičko rešenje. Ako to nije moguće, rešenje se nalazi numeričkim rešavanjem sistema diferencijalnih jednačina primenom neke od numeričkih metoda kao što su metoda konačnih elemenata ili metoda konačnih zapremina. Makroskopski pristup moguće je primeniti i za režim strujanja sa klizanjem  $0,001 < Kn \leq 0,1$ , pri čemu se koriste graničnim uslovima klizanja i temperaturnog skoka na zidu. To znači da brzina i temperatura gasa na zidu nisu jednake brzini i temperaturi zida, što inače važi u teoriji kontinuumu.

Mikroskopski pristup je pristup sa molekularnog nivoa, a rešenja se tada dobijaju numerički. Teorijski, ovaj pristup pokriva ceo opseg Knudsenovih brojeva  $0 < Kn < \infty$ . Metode ovakvog načina rešavanja se mogu podeliti na metode molekularne dinamike i metode koje se zasnivaju na rešavanju jednačina kinetičke teorije, kao što su DSMC (Direct Simulation Monte Carlo) i LBM (Lattice-Boltzmann Method).

MD (Molecular Dinamic) je deterministička metoda. Molekulima u posmatranoj zapremini se dodeljuju brzine koje zadovoljavaju Bolcmanovu raspodelu za zadatu temperaturu na kojoj se sistem nalazi. Interakcija između molekula definiše se potencijalom između njih, a nova pozicija molekula se određuje rešavanjem sistema jednačina koje se dobijaju primenom Njutnovog zakona kretanja na sve posmatrane molekule. Nedostaci ove metode su teškoće u pravilnom izboru potencijala za određeni fluid i potreba za velikim resursima računara za proračun. Najčešće korišćen model koji opisuje potencijal između molekula je Lenard-Džonsonov potencijal (1.1). Potreba za velikim kapacitetom računara proizilazi iz činjenice da na kretanje svakog molekula u posmatranom trenutku utiču svi ostali molekuli. Ako se razmatra  $N$  molekula, definiše se  $N$  jednačina za svaki molekul, a za sve molekule to je  $N^2$  jednačina. MD simulacija nije pogodna za razređene gasove, kada se sudari između molekula rede dešavaju, a pogodnija je za tečnosti ili gasove veće gustine.

Kinetička teorija na osnovu posmatranja materije na molekularnom nivou, tj. na osnovu kretanja i interakcije između molekula, tumači svojstva i stanje materije. Ova teorija se zasniva na pretpostavci da se molekuli ponašaju kao idealan gas, što znači da se smatra da su molekuli čvrste sfere pri čemu je njihova veličina zanemarljiva u odnosu na rastojanja između njih, pa se međumolekularne sile zanemaruju. Osim toga svi molekuli su jednake mase, a sudari između molekula su elastični (nema gubitka kinetičke energije). Primenom statističke teorije koja se zasniva na teoriji verovatnoće izvodi se Bolcmanova jednačina koja predstavlja osnovnu jednačinu kinetičke teorije gasova. Rešenje Bolcmanove jednačine predstavlja funkciju raspodele brzina molekula koja predstavlja verovatnoću nalaženja molekula čija je brzina u određenom brzinskom opsegu u određenom delu prostora u nekom trenutku vremena. Na osnovu Bolcmanove jednačine mogu se primenom perturbacione metode Čapman-Enskog (Chapman-Enskog) izvesti jednačine kontinuuma: jednačina kontinuiteta, jednačina količine kretanja i jednačina energije do kojih se dolazi i drugim putem, primenom teorije kontinuuma,



Slika 1.18 Modeliranje strujanja fluida

---

tj. makroskopskim pristupom. Sa druge strane, Bolcmanovom jednačinom može se opisati ponašanje gasa za sve vrednosti Knudsenovog broja, tj. za kontinuum, strujanje sa klizanjem, prelaznu oblast i potpuno razređen gas. U tim slučajevima rešenja koja proizilaze iz Bolcmanove jednačine nalaze se samo numerički. Pri tome, za pojedine oblasti Knudsenovih brojeva vrši se pojednostavljenje Bolcmanove jednačine u cilju dobijanja nekog njenog oblika koji je pogodan za numeričko rešavanje. Ta pojednostavljenja uglavnom se odnose na odgovarajuće modeliranje integrala sudara (član Bolcmanove jednačine). Jedna od metoda za pojednostavljenje Bolcmanove jednačine za izotermska strujanja je BGK (Bhatnagar, Gross and Krook) model. Korekciju ovog modela, u cilju korišćenja za neizotermska strujanja, dao je Šahov (Шахов) u S modelu. Numeričke metode koje se zasnivaju na modeliranju ponašanja molekula Bolcmanovom jednačinom su DSMC (Direct Simulation Monte Carlo) i LBM (Lattice-Boltzmann Method).

#### 1.3.2.1 Modeliranje strujanja gasa u MEMS-ima i NEMS-ima

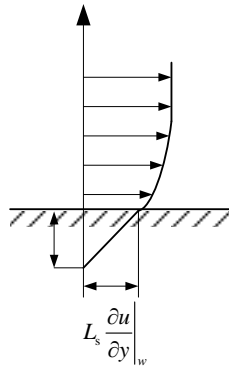
Strujanje gasa u mikro sistemima najčešće je u režimu strujanja sa klizanjem koji se može modelirati jednačinama kontinuuma u kombinaciji sa graničnim uslovima klizanja i temperaturskog skoka na zidu. To znači da brzina i temperatura gasa na zidu nisu jednake brzini i temperaturi zida, što inače važi u teoriji kontinuuma. Tako definisan problem se rešava u nekim slučajevima analitički, a kada to nije moguće, nekom numeričkom metodom kao što je metoda konačnih zapremina. Osim toga rešenja za ovu oblast Knudsenovih brojeva se mogu naći i molekularnim pristupom, numerički. Pri strujanju gasa u nanosistemima Knudsenov broj je toliko veliki da režim strujanja gasa uglavnom zalazi u slobodno molekularni režim. Problemi se rešavaju pomoću kinetičke teorije, uglavnom numeričkim rešavanjem Bolcmanovih jednačina.

#### 1.3.2.2 Modeliranje strujanja tečnosti u MEMS-ima i NEMS-ima

S obzirom na to da se molekuli tečnosti nalaze veoma blizu jedan drugog, pri strujanju tečnosti u mikro i nano kanalima, efekat razređenosti ne dolazi do izražaja i režim strujanja zadovoljava uslove kontinuuma. Prema tome granični uslovi koji se koriste za modele koji opisuju strujanje tečnosti u mikro i nanokanalima su jednaka brzina i temperatura zida i gasa na mestu kontakta. Međutim, eksperimenti su pokazali da se u nekim slučajevima, za određene materijale od kojih je mikrokanal napravljen i određene tečnosti, javlja razlika u brzini tečnosti na zidu u odnosu na zid. To se dešava u eksperimentima npr. pri strujanju heksadekana po glatkoj mica podlozi, pri strujanju vode po hidrofobnoj podlozi, pri strujanju heksadekana po hidrofilnoj podlozi i nizu eksperimenata gde fluid struji po hidrofobnoj podlozi. Klizanje na zidu je u tim slučajevima uočeno na osnovu merenja pada pritiska i poređenjem merenja sa padom pritiska koji bi postojao u slučaju da klizanja na zidu nema. Pokazalo se da je u tim slučajevima pad pritiska znatno manji u odnosu na slučaj kad klizanja ne bi bilo, što ukazuje na pojavu klizanja na zidu. Granični uslov klizanja na zidu za tečnosti ima isti oblik kao granični uslov klizanja prvog reda za gasove (što će kasnije biti detaljno razmatrano):

$$y=0: \quad u = L_s \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}, \quad (1.8)$$

gde je  $L_s$  Navieova (Navier) dužina. Eksperimenti pokazuju da dužina klizanja  $L_s$  može da bude čak reda  $\mu\text{m}$ . Teorijsko objašnjenje ovog fenomena nije egzaktano definisano, ali se u literaturi sreću različite pretpostavke. Jednja od njih je da se između zida i tečnosti javlja podsloj gasa koji dovodi do ovog fenomena. De Ženi (De Genees) je dao izraz kojim približno definiše dužinu klizanja  $L_s \approx \nu/c_m$ , gde je  $\nu$  koeficijent kinematičke viskoznosti, a  $c_m$  srednja brzina molekula gasa u pravcu normale na zid kanala.



**Slika 1.19** Navijeov model klizanja

Dakle, pri modeliranju strujanja tečnosti u mikro i nano kanalima uslovi kontinuuma i dalje važe, što omogućava primenu osnovnih jednačina kontinuuma. Ako je vrsta fluida i površi takva da dolazi do klizanja fluida na zidu koriste se granični Navieov uslov klizanja tečnosti.

### 1.3.3 Bolcmanova jednačina

Rešenje Bolcmanove jednačine predstavlja funkciju raspodele brzina molekula u vremenu i prostoru. Funkcija raspodele brzine  $f(t, \vec{r}, \vec{c})$  srazmerna je broju molekula  $dN$  koji se nalaze u elementarnoj zapremini čija je pozicija definisana vektorom položaja  $\vec{r} = (x, y, z)$ , a koji imaju vektor brzine  $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$  u opsegu od  $\vec{c}$  do  $\vec{c} + d^3\vec{c}$ :

$$f(t, \vec{r}, \vec{c}) = \frac{dN}{d^3\vec{r} d^3\vec{c}}, \quad (1.9)$$

gde je  $d^3\vec{c} = dc_x dc_y dc_z$  i  $d^3\vec{r} = dx dy dz$ . Drugim rečima, broj molekula čije se brzine nalaze u određenom malom opsegu  $d^3\vec{c}$  oko brzine  $\vec{c}$  u posmatranoj elementarnoj



zapremine  $d^3\vec{r}$  u okolini pozicije definisane vektorom položaja  $\vec{r}$  u jednom trenutku vremena  $t$ , srazmeran je funkciji raspodele. Do promene u broju molekula koji se kreću vektorom brzine  $\vec{c}_i$  u nekoj posmatranoj elementarnoj zapremini dolazi usled sudara molekula unutar te zapremine pri čemu neki od njih prestaju da se kreću posmatranom brzinom dok je neki nakon sudara dobijaju, a takođe i usled protoka molekula kroz površinu posmatrane kontrolne zapremine.

Pomoću funkcije raspodele brzine određuju se sve makroskopske veličine stanja. Broj molekula u jedinici zapremine, gustina, brzina, pritisak, temperatura i napon usled viskoznosti određuje se sledećim relacijama:

$$n(t, \vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, \vec{r}, \vec{c}) d^3\vec{c}, \quad (1.10)$$

$$\rho(t, \vec{r}) = m \int_{-\infty}^{+\infty} f(t, \vec{r}, \vec{c}) d^3\vec{c}, \quad (1.11)$$

$$\vec{u}(t, \vec{r}) = \frac{1}{n(t, \vec{r})} \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{c} f(t, \vec{r}, \vec{c}) d^3\vec{c}, \quad (1.12)$$

$$p(t, \vec{r}) = \frac{m}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} |\vec{c} - \vec{u}|^2 f(t, \vec{r}, \vec{c}) d^3\vec{c}, \quad (1.13)$$

$$\frac{3}{2} \frac{k_b}{m} T(t, \vec{r}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{n(t, \vec{r})} |\vec{c} - \vec{u}|^2 f(t, \vec{r}, \vec{c}) d^3\vec{c}, \quad (1.14)$$

$$\sigma_{ij}(t, \vec{r}) = m \int_{-\infty}^{+\infty} (c_i - u_i)(c_j - u_j) f(t, \vec{r}, \vec{c}) d^3\vec{c}, \quad i, j=1,2,3. \quad (1.15)$$

Kao što je rečeno, funkcija raspodele  $f(t, \vec{r}, \vec{c})$  zadovoljava Bolcmanovu jednačinu koja predstavlja jednačinu dinamičke ravnoteže molekula:

$$\frac{Df(t, \vec{r}, \vec{c})}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + c_x \frac{\partial f}{\partial x} + c_y \frac{\partial f}{\partial y} + c_z \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{1}{m} \left( F_x \frac{\partial f}{\partial c_x} + F_y \frac{\partial f}{\partial c_y} + F_z \frac{\partial f}{\partial c_z} \right) = Q(f, f_*), \quad (1.16)$$

gde su  $F_x, F_y, F_z$  projekcije spoljašnje sile  $\vec{F}(t, \vec{r}, \vec{c})$ , a  $Q(f, f_*)$  je integral sudara koji predstavlja promenu funkcije raspodele u elementarnoj zapremini u pravcu kretanja molekula. Integral sudara biće nula ako u posmatranoj zapremini tokom vremena nema promene funkcije raspodele. Integral sudara modelira se na različite načine sa ciljem da definiše interakciju između molekula za različite uslove. Najpoznatiji model za izotermiska strujanja je BGK model, a za neizotermiska S model.

Ako je  $Q(f, f_*) = 0$ , elementarna zapremina gasa je u ravnoteži što znači da se broj molekula u njoj, koji se kreću u malom opsegu oko neke brzine ne menja u

toku vremena. Ako se zanemari uticaj spoljašnjih sila, Bolcmanova jednačina u uslovima ravnoteže je:

$$\frac{Df(t, \vec{r}, \vec{c})}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + c_x \frac{\partial f}{\partial x} + c_y \frac{\partial f}{\partial y} + c_z \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \quad (1.17)$$

Kako je u uslovima ravnoteže materijalni izvod funkcije raspodele nula, to znači da tada nema promene funkcije raspodele u elementarnoj zapremini u pravcu kretanja molekula. Pri malim vrednostima Knudsenovog broja, zbog čestih sudara između molekula, ravnoteža se lako ostvaruje. Tada je rešenje Bolcmanove jednačine Maksvelova (Maxwell) funkcija raspodele:

$$f_0 = n \left( \frac{m}{2\pi k_b T} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{m}{2k_b T} |\vec{c} - \vec{u}|^2 \right], \quad (1.18)$$

gde je  $m$  masa molekula,  $T$  temperatura,  $\vec{c}$  vektor brzina molekula, a  $\vec{u}$  vektor lokalne brzine fluida.

Množenjem Bolcmanove jednačine masom  $m$ , količinom kretanja  $m\vec{c}$  ili energijom molekula  $mc^2/2$  i nalaženjem integrala tih izraza u opsegu svih molekularnih brzina, dobijaju se momentne jednačine: jednačine održanja mase, količine kretanja i energije. Rešenja ovih jednačina se relativno jednostavno mogu naći za slučaj kada  $Kn \rightarrow \infty$  tj. kada su molekuli na velikim rastojanjima, pa se uticaj sudara molekula može zanemariti, i u slučaju kada  $Kn \rightarrow 0$  tj. kada je uticaj sudara molekula značajan, pa strujanje veoma brzo uspostavlja ravnotežno stanje. Međutim do konačnih rešenja se dolazi isključivo numerički, pa se nameće potreba za korišćenjem jednostavnijih aproksimativnih oblika ovih jednačina kad god je to moguće. Jedan od načina pojednostavljenja je korišćenje razvoja u red Čapman-Enskog u slučaju kad stanje fluida malo odstupa od uslova ravnoteže ( $Kn < 1$ ). Tada se funkcija raspodele brzina pretpostavlja u obliku sledećeg perturbacionog reda:

$$f = f_0 + Kn f_1 + Kn^2 f_2 + \dots, \quad (1.19)$$

gde je  $f_0$  Maksvelov izraz za funkciju raspodele koja odgovara ravnotežnom stanju. Zamenom ovog reda u Bolcmanovu jednačinu i izdvajanjem članova istog reda veličine dobija se sistem jednačina. Zamenom rešenja tačnosti  $O(1)$ , tj.  $f_0$  u momentnu jednačinu količine kretanja sledi Ojlerova jednačina za neviskozno strujanje fluida. Rešenje funkcije raspodele prvog reda  $f = f_0 + Kn f_1$  je zadovoljavajuće u slučaju vrlo malih odstupanja od ravnotežnog stanja i tada se jednačina količine kretanja svodi na Navie-Stokesovu jednačinu. U slučaju malo većih odstupanja od ravnoteže potrebno je naći rešenje funkcije raspodele drugog reda  $f = f_0 + Kn f_1 + Kn^2 f_2$ , koje dovodi do Barnetove jednačine za količinu kretanja.

Uobičajeno je da se Navije-Stoksova jednačina izvodi makroskopskim pristupom korišćenjem drugog Njutnovog zakona i da se koristi pri rešavanju problema u okviru klasične mehanike viskoznog fluida ( $Kn < 0,001$ ). Ali, kako ove

---

jednačine proizilaze i iz Bolcmanove jednačine kao jednačina količine kretanja tačnosti reda veličine  $Kn$  broja, mogu se koristiti i u oblasti strajanja sa klizanjem ( $0,001 < Kn < 0,1$ ) pri čemu se umesto graničnih uslova kontinuuma koriste uslovi klizanja i temperaturskog skoka prvog reda koji su takođe tačnosti reda  $Kn$  broja. U početnom delu prelazne oblasti, kada je odstupanje od ravnoteže veće, potrebno je koristiti Barnetove jednačine koje su tačnosti reda  $Kn^2$  sa graničnim uslovima klizanja i temperaturskog skoka drugog reda, tj. graničnim uslovima tačnosti reda  $Kn^2$ . Ove jednačine, drugog reda tačnosti, mogu biti korišćene i za oblast strujanja sa klizanjem u cilju postizanja veće tačnosti.

---

**Literatura**

- [1] Arkilic E. B., Breuer K. S., Schmidt M. A.: Gaseous flow in microchannels, In ASME FED-197, Application of Microfabrication to Fluid Mechanics, 57-66, - ASME, New York 1994.
- [2] Beskok A., (2001) Validation of a New Velocity-Slip Model for Separated Gas Microflows, - Numerical Heat Transfer, 40, 451-471.
- [3] Beskok A., Karniadakis G., (1994) Simulation of heat and momentum transfer in complex micro-geometries, - J. of Thermophysics and Heat Transfer, 8 (4), 647-655.
- [4] Beskok A., Karniadakis G., (1999) A Model for Flows in Channels, Pipes and Ducts at Micro and Nano Scales, - Microscale Thermophys. Eng., 3, 43-77.
- [5] Beskok A., Karniadakis G., Trimmer W., (1996) Rarefaction and Compressibility Effects in Gas Microflows, - J. Fluids Eng., 118, 448-456.
- [6] Brus H.: Theoretical Microfluidics, - Oxford University Press Inc., New York 2008.
- [7] Čantrak S. M.: Hidrodinamika, - Mašinski fakultet, Univerzitet u Beogradu, Beograd 2012.
- [8] Cercignani C.: Slow Rarefied Flows – Theory and Application to Micro-Electro-Mechanical Systems, - Birkhauser Verlag, Basel 2006.
- [9] Codd S. L., Manz B., Seymour J. D., Allaghan, P. T., (1999) Taylor dispersion and molecular displacements in Poiseuille, - Phys. Rev. E, 60, R3491–R3494.
- [10] Cornelius L. T.: MEMS/NEMS Handbook Techniques and Applications, - Springer, New York 2006.
- [11] Crnojević C.: Transport čvrstih materijala fluidima, - Mašinski fakultet, Univerzitet u Beogradu, Beograd 2002.
- [12] Cussler E. L.: Diffusion, mass transfer in fluid systems, - Cambridge University Press, Cambridge 1997.
- [13] Tretheway D., Meinhart C., (2002) Apparent fluid slip at hydrophobic microchannel walls, - Lett. Phys Fluids, 14(3), L9-12.
- [14] de Gennes P. G., (2002) On fluid/wall slippage, - Langmuir, 18, 3413-3414.
- [15] de Gennes P. G., Brochard-Wyart F., Quere D.: Capillarity and wetting phenomena: Drops, bubbles, pearls, waves, - Springer, New York 2003.
- [16] Delhaye J. M., Giot M., Riethmuller M. L.: Thermohydraulics of Two-Phase Systems for Industrial Design and Nuclear Engineering, - McGraw-Hill Book Co., New York 1981.
- [17] Dongqing L.: Encyclopedia of Microfluidics and Nanofluidics, - Springer, New York 2008.
- [18] Đorđević V. D.: Dinamika jednodimenzijskih strujanja fluida, - Mašinski fakultet, Univerzitet u Beogradu, Beograd 1995.
- [19] Durst F.: Fluid Mechanics – An Introduction to the Theory of Fluid Flows, - Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 2008.

## Literatura

---

- [20] Edel J. B., DeMello A. J.: *Nanofluidics Nanoscience and Nanotechnology*, - Royal Society of Chemistry, Cambridge 2009.
- [21] Feynman R. P., (1960) *There's Plenty of Room at the Bottom*, - *Caltech's Engineering and Science*, 23 (5), 22-36.
- [22] Fleisch D.: *A student's Guide to Maxwell's Equations*, - Cambridge University Press, Cambridge 2008.
- [23] Fukui S., Kaneko R., (1988) Analysis of ultra-thin gas film lubrication based on linearized Boltzmann equation: First report derivation of a generalized lubrication equation including thermal creep flow, - *J. Tribol.*, 110, 253-262.
- [24] Fukui S., Kaneko R., (1990) A database for interpolation of Poiseuille flow rates for high Knudsen number lubrication problems, - *J. Tribol.*, 112, 78-83.
- [25] Gad-El-Hak M., (1999) *The Fluid Mechanics of Microdevices-The Freeman Scholar Lecture*, - *J. Fluids Engineering*, 121, 5—33.
- [26] Gad-El-Hak M.: *The MEMS Handbook*, - CRC Press, Boca Raton 2002.
- [27] Harley J., Huang Y., Bau H., Zemel J. N., (1995) Gas flow in micro-channels, - *J. Fluid. Mech.*, 284, 257-274.
- [28] Hong C., Asako Y., Suzuki K., Nahm Y., (2010) Heat Transfer Characteristics of Gaseous Slip Flow in a Micro-channel, - *Journal of Mechanical Science and Technology*, 24, 2577-2581.
- [29] Hsia Y., Domoto G., (1983) An experimental investigation of molecular rarefaction effects in gas-lubricated bearings at ultra low clearances, - *J. Lubr. Technol.*, 105, 120-130.
- [30] Hsu T. R.: *MEMS and Microsystems: Design, Manufacture, and Nanoscale Engineering*, - John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey 2008.
- [31] Karniadakis G., Beskok A.: *Microflows and Nanoflows -Fundamentals and Simulation*, - Springer-Verlag, New York 2005.
- [32] Kirby B. J.: *Micro- and Nanoscale Fluid Mechanics: Transport in Microfluidic Devices*, Cambridge University Press, New York 2010.
- [33] Laser D. J., Santiago J. G., (2004) A review of micropumps, - *J. Micromech. Microeng.*, 14, R35–R64.
- [34] Liu J., Tai Y., Pong K., Ho, C.: *Micromachined Channel/Pressurer Sensor Systems for Micro Flow Studies*, - *Proceedings of the Seventh Int. Conf. On Solid-State Sensors and Actuators*, 1993, 995-998.
- [35] Maxwell J. C., (1879) On Stresses in Rarefied Gases Arising from Inequalities of Temperature, - *Philosophical Transactions of the Royal Society Part I*, 170, 231-256.
- [36] Milićev S. S.: *Neizotermnska strujanja razređenog gasa u mikrokanalima*, Doktorska disertacija, - Univerzitet u Beogradu, Mašinski fakultet, Beograd 2011.
- [37] Milicev S. S., Stevanovic N. D., (2012) A Microbearing Gas Flow with Different Walls' Temperatures, - *Thermal Science*, 16 (1), 119-132.
- [38] Milicev S. S., Stevanovic N. D. (2013) A non-isothermal Couette slip gas flow, *Science China Physics*, - *Mechanics and Astronomy*, 5 (9), 1782-1797.

- 
- [39] Morini G. L., Spiga M., Tartarini P., (2004) The rarefaction effect on the friction factor of gas flow in microchannels, - *Superlattices and Microstructures*, 35, 587-599.
- [40] Moussa W. A., Ahmed H., Badawy W. and Moussa M., (2002) Investigating the Reliability of Electrostatic Comb-Drive Actuators Utilized in Microfluidic and Space systems Using Finite Element Analysis, - *Canadian Journal on Electrical and Computer Engineering*, 27 (4), 195-200.
- [41] Ohwada T., Sone Y., Aoki K., (1989) Numerical Analysis of the Poiseuille and Thermal Transpiration Flows Between Two Parallel Plates on the Basis of the Boltzmann Equation for Hard-Sphere Molecules, - *Phys. Fluids A*, 1, 2042-2049.
- [42] Peng Y., Lu X., Luo J., (2004) A New Lubrication Equation for Ultra-thin Gas Film in Hard Disk Drives, - *Science in China Ser. G Physics, Mechanics&Astronomy*, 47, 37-44.
- [43] Pfahler J., Harley J., Bau H., (1990) Liquid transport in micron and submicron channels, - *Sensors and Actuators*, A21-23, 431-434.
- [44] Pfahler J., Harley J., Bau H., Zemel, J., (1990) Gas and liquid transport in small channels, - *ASME Micro-structures, Sensors, and Actuators*, 19, 149-157.
- [45] Pit R., Hervet H., Leger L., (2000) Direct experimental evidence of slip in hexadecane: solid interfaces, - *Phys. Rev. Lett.*, 85, 980-983.
- [46] Pong K., Ho C., Liu J., Tai Y.: Non-Linear Pressure Distribution in Uniform Microchannels, In *ASME FED-197, Application of Microfabrication to Fluid Mechanics*, 51-56, -ASME, New York 1994.
- [47] Schaaf A. S.: *Mechanics of Rarefied Gases*, In *Encyclopedia of Physics*, 591-625, - Springer-Verlag, Berlin 1963.
- [48] Schaaf A. S., Chambre A. P.: *Flow of Rarefied Gases*, In *Fundamentals of Gas Dynamics*, Editor Emmons, W.H., - Princeton University Press, Princeton 1958.
- [49] Sharipov F., (1999) Non-isothermal Gas Flow Through Rectangular Microchannels, - *J. Micromech. Microeng.*, 9, 394-401.
- [50] Sharipov F., (2011) Data on the Velocity Slip and Temperature Jump on a Gas-Solid Interface, - *J. Phys. Chem., Ref. Data* 40.
- [51] Sharipov F., <http://fisica.ufpr.br/sharipov/>
- [52] Sharipov F., Seleznev V., (1994) Rarefied flow through a long tube at any pressure ratio, - *J. Vac. Sci. Technol. A*, 12 (5), 2933-2935.
- [53] Shen C., Fan J., Xie C., (2003) Statistical Simulation of Rarefied Gas Flows in Micro-Channels, - *J. of Computational Physics*, 189, 512-526.
- [54] Shih C. J., Ho C., Liu J., Tai Y.: Monoatomic and Polyatomic Gas Flow Through Uniform Microchannels, In *ASME Microelektromechanical Systems DSC 59*, 197-203, - ASME, New York 1996.
- [55] Slattery J. C.: *Momentum, Energy, and Mass Transfer in Continua*, - McGraw-Hill, Kogakusha 1972.
- [56] Socolofsky S. A., Jirka G. H.: *Environmental Fluid Mechanics 1: Mixing and Transport Processes in the Environment*, - Texas A&M University, College Station 2005.

## Literatura

---

- [57] Sone Y., (2000) Flows Induced by Temperature Fields in a Rarefied Gas and Their Ghost Effect on the Behavior of a Gas in the Continuum Limit, - *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 32, 779–811.
- [58] Sone Y., Yamamoto K., (1970) Flow of Rarefied Gas over Plane Wall, - *J. Physic. Soc. J.*, 29, 495–508.
- [59] Squires T. M., Quake S. R., (2005) Microfluidics: Fluid physics at the nanoliter scale, - *Rev. Mod. Phys.*, 77, 977–1026.
- [60] Stevanovic N., (2007) A new analytical solution of micro channel gas flow, - *J. Micromech. Microeng.*, 17, 1695-1702.
- [61] Stevanovic N., (2009) Analytical solution of gas lubricated slider microbearing, - *Microfluid. Nanofluid.*, 7 (1), 97-105.
- [62] Stevanović N. D.: Prilog teoriji strujanja razređenih gasova u mikrokanalima, Doktorska disertacija, - Univerzitet u Beogradu, Mašinski fakultet, Beograd 2004.
- [63] Stevanovic N. D., Djordjevic V. D., (2005) On the simultaneous effects of gas rarefaction, wall porosity, and inertia in micro channel flows, - *ZAMM*, 7, 516-522.
- [64] Stevanovic N. D., Djordjevic V. D., (2012) The exact analytical solution for the gas lubricated bearing in the slip and continuum flow regime, - *Publications de l'Institute Mathematique*, 91 (105), 83-93.
- [65] Stevanović N. D.: Strujanje razređenih gasova u mikrokanalima, - Univerzitet u Beogradu, Mašinski fakultet, Beograd 2010.
- [66] Stone H. A., Stroock A. D., Ajdari A., (2004) Engineering flows in small devices: Microfluidics toward a lab-on-a-chip, - *Annu. Rev. Fluid Mech.*, 36, 381–411.
- [67] Stroock A. D., Dertinger S. K. W., Ajdari A., Mezic I., Stone H. A., Whitesides G. M., (2002) Chaotic mixer for microchannels, - *Science*, 295, 647–651.
- [68] Tabeling P.: Introduction to microfluidics, - Oxford University Press, Oxford 2005.
- [69] Takamura Y., Onoda H., Inokuchi H., Adachi S., Oki A., Horiike Y., (2003) Low-voltage electroosmosis pump for stand-alone microfluidics devices, - *Electrophoresis*, 24, 185.
- [70] Tas N., Haneveld J., Jansen H., Elwenspoek M., van den Berg A., (2004) Capillary filling speed of water in nanochannels, - *Appl. Phys. Lett.*, 85, 3274–3276.
- [71] Tien L. C., Lienhard H. J.: Statistical Thermodynamics, - HRW, New York 1971.
- [72] Tison S. A., (1993) Experimental Data and Theoretical Modeling of Gas Flows through Metal Capillary Leaks, - *Vacuum*, 44, 1171-1175.
- [73] Trimmer W., Stroud H. R.: Scaling of Micromechanical Devices, The MEMS Handbook, Editor Gad-el-Hak M., - CRC Press, Boca Raton 2002.
- [74] Vinsenti G.W., Kruger H.C.: Introduction to Physical Gas Dynamics, - R.E. Krieger Publishing Company, Malabar, Florida, 1986.
- [75] White F.M.: Viscous fluid flow, - McGraw-Hill Book Co., Singapore 1991.
- [76] Wu L., Bogy D. B., (2003) New First and Second Order Slip Models for the Compressible Reynolds Equation, - *Transactions of the ASME*, 125, 558-561.

- [77] Xue H., Ji H., Shu C., (2003) Prediction of flow and heat transfer characteristics in micro-Couette flow, - *Microscale Thermophysical Engineering*, 7, 51-68.
- [78] Yu S., Ameen T. A., (2001) Slip-flow heat transfer in rectangular microchannels, - *Int. J. Heat Mass Transfer*, 44, 4225-4234.
- [79] Zhu X., Xin M. D., Liao Q., (2002) Analysis of Heat Transfer Between Two Unsymmetrically Heated Parallel Plates With Microspacing in the Slip Flow Regime, - *Microscale Thermophys. Eng.*, 6 (4), 287–301.
- [80] Zhu Y., Granick S., (2001) Rate-dependent slip of Newtonian liquid at smooth surfaces, - *Phys. Rev. Lett.*, 87 (9), 096105.
- [81] Zohar Y., Lee S. Y. K., Lee W. Y., Jiang L., Tong P., (2002) Subsonic gas flow in a straight and uniform microchannel, - *J. Fluid Mechanics*, 472, 125-151.
- [82] Шарипов Ф. М., Селезнёв В. Д.: Движение разреженных газов в каналах и микроканалах, - УрО РАН, Екатеринбург 2008.
- [83] Шахов Е. М.: Методы исследования потоков разреженных газов, - Наука. Москва 1974.