

Svetislav M. Čantrak

---

# HIDRODINAMIKA

V dopunjeno izdanje



Mašinski fakultet  
Univerziteta u Beogradu  
2012.

Edicija:

## Mehanika fluida i hidraulične mašine

- **Hidrodinamika. V dopunjeno izdanje, 2012.** - ova knjiga  
Čantrak S.
- **Mehanika fluida - Teorija i praksa.** VII izdanje, 2001.  
Čantrak S., Marjanović P., Benišek M., Pavlović M.<sup>+</sup>, Crnojević C.
- **Klasična i uljna hidraulika.** III izdanje, 2006.  
Crnojević C.
- **Dinamika jednodimenzijskih strujanja fluida.** IV izdanje, 2005.  
Đorđević V.
- **Pumpe i ventilatori - problemi, rešenja, teorija.** V izdanje, 2006.  
Protić Z.<sup>+</sup>, Nedeljković M.  
Oktobarska nagrada grada Beograda za najvrednije dostignuće u oblasti tehničkih nauka za 1992. godinu
- **Tehnika merenja.** III izdanje, 2006.  
Benišek M., Nedeljković M., Kilibarda R., Gerasimović D.
- **Hidraulične turbine.** I izdanje, 1998.  
Benišek M.
- **Statika i kinematika fluida.** II izdanje, 1998.  
Saljnikov V.
- **Priručnik za proračun strujanja stišljivog fluida.** VII izdanje, 2005.  
Pavlović D. M.<sup>+</sup>, Stefanović Z.

Urednici edicije:

- Prof. dr Zoran Protić<sup>+</sup>
- Akademik Vladan Đorđević
- Prof. dr Miroslav Benišek
- Prof. dr Svetislav Čantrak

---

Ključne reči: Strujanje viskoznog fluida, unutrašnja laminarna i turbulentna strujanja, razvitek strujanja, laminarni i turbulentni granični sloj, otpor kretanju tela u fluidu, dvodimenzijaska strujanja nevaskoznog fluida.

Svetislav M. Čantrak

---

# HIDRODINAMIKA

V dopunjeno izdanje



Mašinski fakultet  
Univerzitet u Beogradu

Beograd  
2012.

Autor:

Dr Svetislav Čantrak, dipl. inž. maš.,  
redovni profesor Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu

## **HIDRODINAMIKA**

Peto dopunjeno izdanje

---

Recenzenti:

Akademik Vladan D. Đorđević,  
redovni profesor Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu  
Dr Miroslav Benišek, dipl. inž. maš.,  
redovni profesor Mašinskog fakulteta Univerziteta u Beogradu

Izdavač:

Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu  
11120 Beograd 35, Kraljice Marije 16,  
telefon: 011 3370 350 i 3302 384, telefax: 011 3370 364

Za izdavača: Dekan prof. dr Milorad Milovančević  
Glavni i odgovorni urednik: Prof. dr Aleksandar Obradović  
Odobreno za štampu odlukom Dekana Mašinskog fakulteta u Beogradu  
br. 215/12 od 10.10.2012. godine.

Štampa:

**PLANETA PRINT**

11000 Beograd, Ruzveltova10, tel.: 011 3088 129

Tiraž: 300 primeraka

---

© Autor i Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu. Zabranjeno preštampavanje i umnožavanje. Sva prava zadržavaju izdavač i autor.



## 1. UMETO PREDGOVORA

Ovaj udžbenik, s obzirom da obuhvata izabrana poglavlja, počinje neuobičajenom numeracijom – Poglavljem 2.9 !

Dva valjana razloga postoje za to. Prvi je više formalan. Naime, sva poglavlja, koja se u knjizi S. Čantrak, C. Crnojević: „Hidraulika. Teorija, problemi, zadaci“, Građevinska knjiga, Beograd 1990. god, nalaze ispred ovog poglavlja, pojavile se u prerađenom izdanju od docenta C. Crnojevića. Drugi, bitniji razlog sastoji se u sledećem. Korisnici navedene knjige, kao i sam autor, ukazuju na činjenicu da njena poglavlja od 2.9 do 2.17 predstavljaju nastavak materije obuhvaćene sledećim udžbenicima ove edicije:

1. V. Saljnikov: „Statika i kinematika fluida“, Mašinski fakultet, Beograd, 1998. god.
2. V. Đorđević: „Dinamika jednodimenzijских strujanja fluida“, Mašinski fakultet, Beograd, 1995. god.
3. S. Čantrak, M. Benišek, M. Pavlović, P. Marjanović, C. Crnojević: „Mehanika fluida. Teorija i praksa“, Mašinski fakultet, Beograd, 1998. god.

S tim u vezi, autor ističe da su sa ova tri udžbenika detaljno obuhvaćene sledeće nastavne oblasti:

- a) svojstva fluida i dejstvo sila, statika i kinematika fluida,
- b) dinamika jednodimenzijских strujanja stišljivih i nestišljivih fluida,
- c) dvodimenzijска strujanja neviskoznog fluida sa rešenim problemima iz navedene materije pod a), b) i c).

Ovim oblastima se oblast

- d) laminarnih i turbulentnih unutrašnjih i spoljašnjih strujanja fluida,

koja se razmatra u izabranim odeljcima 2.9 – 2.17, suštinski pridružuje, čineći tako sa njima celinu materije koja se predaje i vežba u okviru različitih predmeta i kurseva Katedre za mehaniku fluida.

Na osnovu svega izloženog, autor se, poštujući i uvažavajući potrebe i mišljenja studenata i kolega, ipak odlučio da se u ovom trenutku udžbenik pojavi baš u ovakvom neizmenjenom obliku. Ovo treba shvatiti i kao predznak neophodnih budućih napora, kako u objedinjavanju i osavremenjavanju nastavne materije i udžbeničke literature, tako i u stvaranju kreativnih nastavnih planova i programa u oblasti Nauke o strujanju.

Beograd, januara 1998. god.

Autor

Saglasno novom nastavnom planu i programu ovaj udžbenik obuhvata deo dinamike fluida koji se predaje u okviru predmeta: Hidromehanika, Mehanika fluida i Hidraulika i pneumatika. S tim u vezi je neizmenjenom sadržaju prvog izdanja knjige „Izabrana poglavlja iz hidrodinamike“ pridružen, odlukom Komisije za izdavačku delatnost, skraćeni naslov „Hidrodinamika“.

Beograd, marta 2000. god.

Autor

Prihvaćen je predlog izdavača da se odštampa IV izdanje jer je prethodno brzo rasprodato. Ovo neće uticati na pisanje prerađenog i dopunjenog izdanja koje je u toku.

Beograd, jula 2005. god.

Autor

Uz peto dopunjeno izdanje

Studenti i kolege su, dosadašnjim druženjem sa ovim udžbenikom, suštinski ukazali na aktuelnost obuhvaćene materije. Autor je, sa velikom zahvalnošću, uvažio njihove sugestije za svrsishodno sjedinjavanje nastavnih oblasti iz laminarnog i turbulentnog strujanja sa nastavnom materijom koja obuhvata nevtložna, tj. potencijalna strujanja fluida. U tom smislu je V izdanje dopunjeno materijom

*3. Dvodimenzijaska strujanja neviskoznog fluida,*

koju je autor napisao kao glavu III u koautorskom udžbeniku navedenom pod tačkom 3. uvoda „1. Umesto predgovora“. Na ovaj način je, uz uvažavanje postojeće literature, ovaj knjiga još temeljitije prilagođena kako proučavanju mehanike fluida u okviru različitih predmeta Katedre za mehaniku fluida na svim nivoima studija, tako i drugim nastavnim predmetima i stručno-naučnim oblastima, koje imaju uporište u nauci o strujanju.

Beograd, septembra 2012. god.

Autor

## SADRŽAJ

### 1. UMEMO PREDGOVORA

### 2. LAMINARNA I TURBULENTNA STRUJANJA

<b>2.9. Zakoni sličnosti i modeliranje hidrauličkopneumatskih pojava .....</b>	<b>1</b>
2.9.1. Osnovni problem dimenzijske analize. $\pi$ – teorema .....	1
2.9.2. Isticanje nestišljivog fluida iz rezervoara .....	2
2.9.3. Pad pritiska u cilindričnoj cevi kružnog preseka .....	3
2.9.4. Stacionarni i nestacionarni strujni procesi .....	4
2.9.5. Hagen-Puazejev obrazac .....	6
2.9.6. Strujanje u hidraulički kratkim cevima .....	6
2.9.7. Strujanje stišljivog fluida – Mahov broj .....	6
2.9.8. Otpor oscilatorom kretanju tela .....	8
2.9.9. Sila otpora oscilatorom kretanju u viskoznom stišljivom fluidu .....	8
2.9.10. Karakteristične dimenzije najvećih kapi tečnosti u slobodnom mlazu .....	8
2.9.11. Brzina padanja malih kapljica tečnosti u vazduhu .....	9
2.9.12. Brzina podizanja veoma malih mehurova gasa u tečnosti .....	10
2.9.13. Darsijeva formula .....	10
2.9.14. Obrtanje diska u cilindričnoj komori .....	11
2.9.15. Modeliranje hidrauličkih pojava pomoću delimične sličnosti .....	11
2.9.16. Delimična sličnost pri jednakosti Rejnoldsovih brojeva .....	13
2.9.17. Učestanost obrtanja modela brodske elise .....	14
2.9.18. Zavisnost između Frudovih brojeva za objekat i model .....	14
2.9.19. Odnos energetskih karakteristika pri delimičnoj hidrodinamičkoj sličnosti .....	14
2.9.20. Model vazdušne turbine – sličnost u odnosu na Mahov i Rejnoldsov broj ..	15
2.9.21. Aksijalni kompresor – strujne karakteristike objekta i modela .....	15
<b>2.10. Metode elektrohidrauličkih, elektropneumatskomehaničkih i hidrauličkopneumatskih analogija .....</b>	<b>17</b>
2.10.1. Analogija hidrauličkih kola i električnih kola jednosmerne struje .....	17
2.10.2. Hidraulički potenciometar .....	23
2.10.3. Hidraulički „omski“ otpor, hidraulička induktivnost i kapacitivnost .....	25
2.10.4. Elektrohidraulička analogija u slučaju hidrauličkog udara .....	27
2.10.5. Modeliranje ravanskog potencijalnog strujanja nestišljivog fluida analognim električnim poljem .....	28
2.10.6. Elektrohiodinamička analogija u teoriji filtracije .....	31
2.10.7. Modeliranje pneumatskih sistema primenom teorije dinamičkih analogija ..	32
2.10.8. Formiranje ekvivalentnih shema saglasno prvom sistemu dinamičkih analogija .....	34
2.10.9. Prvi sistem pneumoelektrične analogije – akustični niskofrekventni filter ..	37
2.10.10. Ekvivalentna električna šema za mehanički sistem .....	37

2.10.11.	Hidraulička analogija dvodimenzijskog stacionarnog strujanja gasa .....	38
2.10.12.	Hidrauličkopneumatička analogija za jednodimenzijska nestacionarna strujanja .....	40
<b>2.11.</b>	<b>Primena teorije polja pri proučavanju strujanja i fizičke osnove kinematike fluida .....</b>	<b>44</b>
2.11.1.	Osnovni izrazi u krivolinijskim ortogonalnim koordinatama .....	44
2.11.2.	Osnovna svojstva skalarnih i vektorskih polja u hidromehanici .....	47
2.11.3.	Diferencijalne relacije za izvođenje osnovnih jednačina i teorema u mehanici fluida .....	49
2.11.4.	Uslov koji masene sile moraju da zadovolje pri mirovanju fluida .....	54
2.11.5.	Potencijalno polje .....	55
2.11.6.	Divergencija vektorskog proizvoda, nestišljiv fluid i strujna funkcija .....	55
2.11.7.	Jednodimenzijsko stacionarno strujanje – izvod vektorske funkcije po skalarnoj promenljivoj – izvod vektora konstantnog intenziteta .....	55
2.11.8.	Uopštena integralna formula za transformaciju površinskog u zapreminski integral .....	56
2.11.9.	Fluks i divergencija brzinskog polja – formula Gausa-Ostrogradskog .....	57
2.11.10.	Prva i druga Grinova formula .....	58
2.11.11.	Relacije koje proizilaze iz Grinovih formula – slučaj harmonijske funkcije .....	59
2.11.12.	Uopšteni Stoksov obrazac i njegovo fizičko značenje .....	59
2.11.13.	Primeri primene formula vektorske analize .....	60
2.11.14.	Materijalni izvod i njegovo fizičko tumačenje. Lagranževa metoda .....	62
2.11.15.	Fizička i grafička interpretacija ukupne promene brzine fluidnog delića ....	65
2.11.16.	Oblik teoreme prenosa pogodan za razmatranje zakona održanja materije, količine kretanja i energije .....	66
<b>2.12.</b>	<b>Komponente tenzora napona i diferencijalne jednačine strujanja viskozno fluida u ortogonalnim krivolinijskim koordinatama .....</b>	<b>68</b>
2.12.1.	Uopštena Njutnova hipoteza o naponima .....	68
2.12.2.	Izrazi za normalne i tangencijalne naponne u Dekartovim koordinatama ....	69
2.12.3.	Komponente tenzora napona u cilindričnim koordinatama .....	70
2.12.4.	Normalni i tangencijalni naponi u cilindričnim koordinatama .....	70
2.12.5.	Zakon održanja materije – jednačina kontinuiteta .....	70
2.12.6.	Jednačina kontinuiteta u Dekartovim, cilindričnim i sfernim koordinatama .....	71
2.12.7.	Jednačina količine kretanja. Navije-Stoksove jednačine .....	71
2.12.8.	Jednačina kretanja neprekidne sredine u krivolinijskim ortogonalnim koordinatama predstavljena pomoću napona .....	75
2.12.9.	Promena baznih vektora krivolinijskog ortogonalnog sistema .....	76
2.12.10.	Izvodi jediničnih vektora po cilindričnim i sfernim koordinatama .....	77
2.12.11.	Diferencijalne jednačine količine kretanja u krivolinijskim ortogonalnim koordinatama .....	77
2.12.12.	Jednačine kretanja izražene posredstvom napona u cilindričnim koordinatama .....	78

2.12.13.	Diferencijalne jednačine kretanja neprekidne sredine u sfernim koordinatama .....	79
2.12.14.	Navije-Stoksove jednačine u cilindričnim koordinatama .....	80
2.12.15.	Navije-Stoksove jednačine u sfernim koordinatama .....	81
2.12.16.	Navije-Stoksove jednačine – diferencijalni operatori u generalisanim koordinatama .....	82
<b>2.13.</b>	<b>Raspodele brzina i napona u unutrašnjim potpuno razvijenim laminarnim i turbulentnim strujanjima nestišljivog fluida .....</b>	<b>83</b>
2.13.1.	Jednačina vrtloga .....	83
2.13.2.	Laminarno strujanje između dve paralelne ploče .....	83
2.13.3.	Primer. Raspodele brzine i tangencijalnog napona .....	86
2.13.4.	Strujanje između nagnutih paralelnih ploča i generalisani pritisak .....	86
2.13.5.	Laminarno strujanje u cevi prstenastog poprečnog preseka .....	88
2.13.6.	Raspodele brzine i napona pri laminarnom strujanju kroz prave kružne cevi .....	89
2.13.7.	Primer. Proračun strujnih veličina pri laminarnom strujanju u nagnutoj cilindričnoj cevi .....	90
2.13.8.	Laminarno strujanje između dva saosna cilindra pokretna u aksijalnom pravcu .....	91
2.13.9.	Raspodele brzine i napona pri strujanju između dva obrtna koaksijalna kružna cilindra .....	92
2.13.10.	Turbulentno strujanje, Reynoldsove jednačine i fizički smisao korelacija brzina. Strujanje između paralelnih ploča .....	94
2.13.11.	Modeliranje turbulentnih napona. Prantlova teorija o putanji mešanja .....	100
2.13.12.	Turbulentno strujanje u hidraulički glatkim cevima. Stepni zakon raspodele brzine i zavisnost koeficijenta trenja od Reynoldsovog broja (Blazijusov zakon trenja) .....	103
2.13.13.	Univerzalni zakon raspodele brzine u hidraulički glatkim cevima. Zakon zida. Viskozni podsloj, prelazna i logaritamska oblast .....	108
2.13.14.	Univerzalni zakon trenja pri turbulentnom strujanju u hidraulički glatkim cevima .....	111
2.13.15.	Reynoldsove jednačine i turbulentni naponi u cilindričnim koordinatama .....	113
2.13.16.	Potpuno razvijeno turbulentno strujanje u cevi .....	114
2.13.17.	Raspodele Prantlove putanje mešanja i turbulentne kinematičke viskoznosti u cevi .....	116
2.13.18.	Turbulentno strujanje u hidraulički potpuno hrapavoj cevi kružnog preseka .....	118
2.13.19.	Zakon trenja u hidraulički potpuno hrapavim cevima .....	120
2.13.20.	Primer. Laminarno i turbulentno strujanje. Raspodela putanje mešanja .....	121
2.13.21.	Strujanje sloja tečnosti niz nagnutu ravnu površ. Funkcija disipacije .....	121
2.13.22.	Jednostavna peristaltička pumpa – strujanje kroz prstenastu elastičnu cev promenljivog preseka .....	122
2.13.23.	Potpuno razvijeno stacionarno laminarno strujanje između dve vertikalne međusobno paralelne pokretne ploče .....	122

2.13.24.	Relativno strujanje fluida pri rotaciji sistema konstantnom ugaonom brzinom oko vertikalne ose – zapreminski protok i raspodela pritiska .....	123
2.13.25.	Razvijeno laminarno strujanje – isticanje tečnosti iz cevi u jednu komoru – polje pritiska i gubitak mehaničke energije .....	124
<b>2.14.</b>	<b>Problemi potpuno razvijenih laminarnih i turbulentnih strujanja viskozne nestišljive tečnosti u cevima raznih poprečnih preseka (pravougaonih, prstenastih, trougaonih, eliptičnih i drugih) .....</b>	<b>126</b>
2.14.1.	Stacionarno laminarno strujanje u cevima raznih poprečnih preseka .....	126
2.14.2.	Raspodela brzine i zakon trenja u cevi eliptičnog poprečnog preseka .....	127
2.14.3.	Pad pritiska usled trenja u cevima čiji se poprečni presek razlikuje od kružnog .....	129
2.14.4.	Opšti oblik zakona trenja. Laminarno strujanje u cevi prstenastog preseka .....	130
2.14.5.	Polje brzine i zakon trenja pri laminarnom strujanju u cevima pravougaonog poprečnog preseka .....	133
2.14.6.	Zakon trenja pri laminarnom strujanju u pravougaonom procepu .....	135
2.14.7.	Polje brzine i zakon trenja pri laminarnom strujanju u cevima čiji je poprečni presek oblika trougla ili kružnog isečka .....	136
2.14.8.	Turbulentno strujanje u cevi trougaonog poprečnog preseka .....	138
2.14.9.	Turbulentno strujanje i sekundarna strujanja druge vrste .....	139
2.14.10.	Praktični obrasci za koeficijent trenja pri turbulentnom strujanju u cevima pravougaonog i prstenastog poprečnog preseka .....	141
2.14.11.	Potpuno razvijeno laminarno strujanje u prostoru između dve ekscentrično postavljene kružne cevi .....	143
2.14.12.	Turbulentno uopšteno Kuetovo strujanje u hidraulički glatkim cevima prstenastog poprečnog preseka .....	145
2.14.13.	Metod proračuna turbulentnog Kuetovog strujanja sa gradijentom pritiska u prstenastoj cevi sa hidraulički glatkim površima .....	147
2.14.14.	Osnovni parametri laminarnog i turbulentnog strujanja u cevima različitih poprečnih preseka .....	148
<b>2.15.</b>	<b>Razvitak strujanja tečnosti i problemi laminarnog i turbulentnog strujanja u početnim (ulaznim) delovima cevi raznih preseka .....</b>	<b>151</b>
2.15.1.	Struktura laminarnog strujanja u ulaznoj, tj. početnoj deonici cevi .....	151
2.15.2.	Analiitičko rešenje razvitka laminarnog strujanja tečnosti u cilindričnoj cevi kružnog preseka .....	153
2.15.3.	O još nekim rešenjima dobijenim iz linearizovanih jednačina količine kretanja .....	154
2.15.4.	Primena integralnih oblika jednačina pri proučavanju razvitka laminarnog strujanja .....	157
2.15.5.	Grafički prikaz raspodele brzine u ulaznoj deonici cevi pri laminarnom strujanju .....	159
2.15.6.	Opšte zavisnosti koje definišu povećanje pada pritiska u početnim deonicama cevi .....	162
2.15.7.	Raspodela pritiska u početnoj (ulaznoj) deonici cevi .....	164

2.15.8.	Razvitak laminarnog strujanja između dve ravne paralelne ploče .....	166
2.15.9.	Povećanje pada pritiska i dužina početne (ulazne) deonice pri laminarnom strujanju u cevima raznih poprečnih preseka .....	168
2.15.10.	Struktura turbulentnog strujanja u početnom (ulaznom) delu cevi .....	169
2.15.11.	Osnovne jednačine turbulentnog strujanja u početnim (ulaznim) deonicama hidraulički glatkih i hrapavih cevi .....	171
2.15.12.	Raspodela aksijalne brzine i koeficijenta trenja pri turbulentnom strujanju u ulaznoj deonici .....	172
<b>2.16.</b>	<b>Strujanje tečnosti kroz procepe i hidrodinamička teorija podmazivanja .....</b>	<b>175</b>
2.16.1.	Strujanje tečnosti kroz ravanske procepe, tj. zazole .....	175
2.16.2.	Potpuno razvijeno laminarno strujanje u ravanskom procepu .....	176
2.16.3.	Strujanje kroz ravanski i prstenasti procep .....	177
2.16.4.	Prstenasti koncentrični procep i sila trenja .....	178
2.16.5.	Ravanski procep i otpor kretanju ploče .....	179
2.16.6.	Prstenasti procep i frikciona pumpa .....	180
2.16.7.	Ravanski procep promenljiv u toku vremena i odgovarajuća sila .....	182
2.16.8.	Zavisnost sile od veličine procepa pri istiskivanju sloja tečnosti .....	184
2.16.9.	Ravanski procep promenljive širine .....	184
2.16.10.	Ravanski procep sa poroznim zidovima .....	185
2.16.11.	Procepi, sloj za podmazivanje i klizno ležište .....	186
2.16.12.	Problem hidrodinamičkog podmazivanja. Kretanje tankog sloja ulja u kliznom ležištu .....	188
2.16.13.	Ukupna sila pritiska i sila trenja kod aksijalnog kliznog ležaja .....	190
2.16.14.	Problem strujanja ulja u cilindričnom kliznom ležaju .....	191
2.16.15.	Dejstvo sile pritiska i sile trenja na rukavac vratila .....	193
2.16.16.	Proračun momenta trenja, raspodele pritiska i ekscentriciteta kliznog ležaja .....	195
2.16.17.	Proračun radijalnog ležaja pomoću formule Petrova .....	196
<b>2.17.</b>	<b>Proračun ukupnog otpora kretanju tela u fluidu. Otpor trenja i otpor pritiska. Proračun laminarnog i turbulentnog graničnog sloja i vrtložnog traga .....</b>	<b>198</b>
2.17.1.	Granični sloj, raspodele brzine i vrtložnosti i debljina graničnog sloja .....	198
2.17.2.	Uticaj gradijenta pritiska, odvajanje graničnog sloja i otpor pritiska .....	200
2.17.3.	Prantlove jednačine stacionarnog strujanja u ravanskom graničnom sloju .....	202
2.17.4.	Izvođenje Prantlovih jednačina iz Navije-Stoksovih jednačina u bezdimenzijskom obliku .....	204
2.17.5.	Struktura i razvoj graničnog sloja pri prelazu laminarnog strujanja u turbulentno .....	205
2.17.6.	Profil brzine i integralne karakteristike graničnog sloja .....	207
2.17.7.	Raspodela intenziteta vektora ugaone brzine fluidnog delića u blizini tačke odvajanja .....	210
2.17.8.	Integralna jednačina količine kretanja za strujanje u graničnom sloju .....	211

2.17.9.	Raspodele brzine i njenih izvoda u graničnom sloju i položaj tačaka odvajanja .....	213
2.17.10.	Proračun laminarnog graničnog sloja i otpor trenja pri opstrujavanju ravne ploče .....	215
2.17.11.	Raspodela pritiska po površi opstrujavanog tela. Otpor pritiska, tj. čeonni otpor .....	218
2.17.12.	Dejstvo viskozne tečnosti na opstrujavano telo. Sila otpora kretanju tela ...	222
2.17.13.	Struktura strujanja pri opstrujavanju tela viskoznom tečnošću .....	224
2.17.14.	Određivanje sile otpora za ploču na osnovu raspodele brzine u vrtložnom tragu .....	225
2.17.15.	Smicajni sloj, nestabilnost laminarnog strujanja i nastanak turbulencije ....	227
2.17.16.	Struktura i jednačine turbulentnog graničnog sloja .....	228
2.17.17.	Proračun turbulentnog graničnog sloja bez gradijenta pritiska i određivanje otpora trenja za ploču .....	229
2.17.18.	Koeficijent otpora i koeficijenti pritiska za tela različitih oblika .....	231
2.17.19.	Primena jednačine impulsa za određivanje otpora kretanju hidraulički glatke ploče .....	233
2.17.20.	Proračun laminarnog graničnog sloja na ravnoj ploči – raspodela brzine zadata polinomom četvrtog stepena .....	235
2.17.21.	Proračun turbulentnog graničnog sloja na ravnoj ploči pri stepenom zakonu promene brzine .....	236
2.17.22.	Raspodele tangencijalnog napona, debljine laminarnog graničnog sloja, debljine istiskivanja i debljine gubitka impulsa duž ravne ploče .....	236
2.17.23.	Koeficijent otpora ploče kao funkcija od hrapavosti i Reynoldsovog broja ..	237
2.17.24.	Proračun turbulentnog traga iza ploče .....	239
2.17.25.	Sila otpora kretanju cilindričnog tela .....	241
2.17.26.	Otpor i raspodela brzine u vrtložnom tragu poprečno opstrujavanog kružnog cilindra .....	241

### 3. DVODIMENZIJSKA STRUJANJA NEVISKOZNOG FLUIDA

3.13.	Ravanska stacionarna strujanja nestišljivog fluida i konformno preslikavanje ovih strujanja .....	243
	• Jednačina kontinuiteta i strujna funkcija • Zapreminski protok • Vektor vrtložnosti • Potencijal brzine • Koši-Rimanove jednačine • Kompleksni potencijal i kompleksna brzina • Cirkulacija • Bernulijeva jednačina • Kompleksni potencijali osnovnih strujanja • Konformno preslikavanje • Transformacija Žukovskog • Teorema o kružnici.	
3.13.1.	Strujanje u pravom uglu, udar paralelne struje u ravnu površ, konformno preslikavanje i dvopol .....	246
3.13.2.	Formiranje kompleksnog potencijala na osnovu zadate projekcije brzine, konformno preslikavanje i izvor u jednolikoj struji – opstrujavanje neograničenog tela (polutela) .....	248
3.13.3.	Strujanje u polju osamljenog dvopola i primena Bernulijeve jednačine .....	249



3.13.4.	Konformno preslikavanje strujanja u uglovima u strujno polje ponora smeštenog u jednolikoj struji .....	250
3.13.5.	Strujanje u polju hidrodinamičkih singulariteta tipa osamljenog izvora, kao i u polju izvora i ponora jednakih izdašnosti .....	251
3.13.6.	Hidrodinamički singulariteti tipa osamljenog vrtloga, kao i dva vrtloga čije su cirkulacije istog intenziteta, ali suprotnog znaka .....	253
3.13.7.	Potencijali brzine i strujne funkcije pri strujanju u uglovima i u polju ponora postavljenog u jednoliku struju .....	254
3.13.8.	Metod određivanja strujnog polja za slučaj poznate funkcije potencijala brzine .....	255
3.13.9.	Analiza strujnog polja osamljenog kosog dvopola kao i acikličnog opstrujavanja kružnog cilindra .....	256
3.13.10.	Metod određivanja strujnog polja kada je zadata strujna funkcija. Dvopol u jednolikoj struji i superpozicija vrtloga – ciklično opstrujavanje kružnog cilindra .....	258
3.13.11.	Strujanje u polju hidrodinamičkih singulariteta tipa izvora različitih izdašnosti .....	259
3.13.12.	Strujanje u polju dva hidrodinamička singulariteta tipa istosmernih vrtloga jednakih cirkulacija .....	260
3.13.13.	Osamljeni vrtlog, primena Bernulijeve jednačine i izvor u jednolikoj struji ...	262
3.13.14.	Dekompozicija kompleksnog potencijala, izlaganje izvora i ponora jednakih izdašnosti jednolikoj struji i dvopol .....	263
3.13.15.	Superpozicija hidrodinamičkih singulariteta tipa izvora i ponora istih i različitih izdašnosti .....	264
3.13.16.	Analiza strujanja u polju dva suprotnosmerna vrtloga istih cirkulacija i njegovo preslikavanje u strujno polje ponora izloženog jednolikoj struji .....	265
3.13.17.	Opstrujavanje ovalnog cilindra, tj. ovala Rankina. Aciklično strujanje oko kružnog cilindra i primena teoreme o kružnici .....	266
3.13.18.	Strujanja u polju hidrodinamičkih singulariteta tipa izvora i vrtloga, kao i zamena odgovarajućih strujnica ravnim zidom .....	268
3.13.19.	Kompleksni potencijal, strujna funkcija i potencijal brzine strujanja u polju dva suprotnosmerna vrtloga i njihovo konformno preslikavanje u jednoliku pravolinijsku struju .....	270
3.13.20.	Superpozicija izvora i ponora istih izdašnosti, konformno preslikavanje i osamljeni vrtlog .....	271
3.13.21.	Superpozicija dvopola i jednolike pravolinijske struje – aciklično opstrujavanje kružnog cilindra .....	273
3.13.22.	Izvor u polju jednolike pravolinijske struje i preslikavanje dobijenog strujanja u polje osamljenog dvopola .....	274
3.13.23.	Konformno preslikavanje strujnog polja dva suprotnosmerna vrtloga u polje osamljenog izvora .....	275
3.13.24.	Kompleksni potencijali strujanja u polju jednolike struje i ponora, kao i u polju dva suprotnosmerna vrtloga .....	276

3.13.25.	Analiza strujnih polja dva izvora istih izdašnosti kao i dvopola u jednolikoj struji .....	277
3.13.26.	Određivanje kompleksnog potencijala strujanja koje se formira postavljanjem kružnog cilindra u polje izvora – problem opstrujavanja kružnog cilindra izvorom. Strujna slika dva ponora jednakih izdašnosti .....	278
3.13.27.	Superpozicija strujnih polja ponora i dva izvora. Strujanje u polju vrtloga združenog sa izvorom (sličnost sa turbomašinama) .....	280
3.13.28.	Analiza konformnih preslikavanja dobijenih primenom funkcije Žukovskog – preslikavanje kružnica u duži, elipse i simetrične profile Žukovskog .....	282
3.13.29.	Razmatranje transformacije Žukovskog u slučajevima preslikavanja familije kružnica u familije kružnih lukova i familije profila Žukovskog (veliki značaj za tehničku praksu) .....	284
3.13.30.	Određivanje kompleksnih potencijala strujanja oko ravne ploče i oko eliptičkog cilindra primenom transformacije Žukovskog .....	286
<b>3.14.</b>	<b>Dejstvo struje nestišljivog fluida na telo .....</b>	<b>288</b>
	• Sila pritiska • Moment sila pritiska • Blazijus-Čapljiginov obrazac • Opšti oblik kompleksnog potencijala složenih strujanja • Hidrodinamički singulariteti, Loranov red i reziduum funkcije • Teorema Kuta-Žukovskog • Cirkulacija i sila uzgona • Izračunavanje sila pritiska primenom Lagalijeve formule.	
3.14.1.	Određivanje sile pritiska na kružni cilindar koji je postavljen u jednoliku pravolinijsku struju .....	290
3.14.2.	Izračunavanje rezultujućeg momenta za element konstrukcije oblika četvrtine tanke cilindrične ljske izložene dejstvu jednolikog strujanja .....	291
3.14.3.	Sila pritiska i njen moment pri opstrujavanju eliptičkog cilindra .....	292
3.14.4.	Određivanje sile pritiska i njenog momenta za koordinatni početak pri opstrujavanju ravne ploče .....	292
3.14.5.	Primena postulata Žukovskog-Čapljigina i analiza sile pritiska na simetrični profil Žukovskog izložen jednolikoj struji .....	293
3.14.6.	Izračunavanje sile pritiska na kružni cilindar koji se nalazi u strujnom polju izvora. Primena Blazijus-Čapljiginove i Lagalijeve formule... ..	295
<b>3.15.</b>	<b>Osnosimetrična stacionarna strujanja nestišljivog fluida .....</b>	<b>298</b>
	• Meridijanska ravan i cilindrični koordinatni sistem • Radijalna i aksijalna brzina • Jednačina kontinuiteta i uvođenje strujne funkcije • Zapreminski protok • Vrtložnost i potencijal brzine • Jednačine za proučavanje osnosimetričnih potencijalnih strujanja • Princip slaganja osnovnih strujanja u cilju dobijanja složenih strujanja.	
3.15.1.	Određivanje potencijala brzine i strujne funkcije iz zadate projekcije brzine ..	299
3.15.2.	Polje brzine i pritiska, potencijal brzine i strujna funkcija pri osnosimetričnom strujanju u prisustvu ravnog zida .....	300

3.15.3.	Analiza brzinskog polja i raspodele pritiska u osnosimetričnom strujanju određenom sa zadatom strujnom funkcijom ....	301
3.15.4.	Istraživanje zbirnog strujanja koje nastaje združivanjem tačkastog izvora sa jednolikom strujom. Polje brzine i protok .....	302
3.15.5.	Analiza opstrujavanja glavčine aksijalnog zamajca. Raspodele brzine i pritiska .....	304
3.15.6.	Određivanje potencijala brzine pri opstrujavanju obrtnog elipsoida i sfere paralelnom jednolikom strujom .....	306
3.16.	<b>Osnovne matematičke metode hidromehanike.</b>	
	<b>Metode hidodinamičkih singulariteta i teorije analitičkih funkcija .....</b>	<b>310</b>
	1. Primena metode superpozicije singulariteta. Neprekidne raspodele hidrodinamičkih singulariteta; 2. Potencijal brzine i strujna funkcija osnovnih osnosimetričnih strujanja: 2.1. <i>Jednoliko strujanje</i> ; 2.2. <i>Tačkasti izvor</i> ; 2.3. <i>Prastorni dvopol</i> ; 3. Primena analitičkih funkcija kompleksne promenljive u hidromehanici (Košijeva integralna formula, Loranov red, reziduum, singulariteti, konformno preslikavanje, metod lika, tj. simetrije): 3.1. <i>Integraljenje, Košijeva teorema i njeno fizičko tumačenje</i> ; 3.2. <i>Singulariteti, stav o ekvivalenciji putanja integraljenja – princip deformacije konture integraljenja i Košijeva integralna formula</i> ; 3.3. <i>Razvoj analitičke funkcije u stepeni red. Tejlorov red. Izolovane singularne tačke jednoznačnih analitičkih funkcija. Loranov red. Reziduum (ostatak) funkcije</i> ; 3.4. <i>Integraljenje analitičkih funkcija metodom reziduuma. Košijeva teorema reziduuma (Košijev stav o ostatku funkcije)</i> ; 3.5. <i>Izračunavanje reziduuma funkcije za slučaj da singulariteti predstavljaju polove funkcije.</i>	
3.16.1.	Nesimetrično opstrujavanje paraboličkog profila. Neprekidna raspodela vrtloga duž x-ose .....	325
3.16.2.	Metoda hidrodinamičkih singulariteta. Primer dobro opstrujavanog tela – superpozicija izvora i sistema neprekidno raspoređenih ponora u jednolikoj struji .....	327
3.16.3.	Dejstvo rešetke profila – polje brzine beskonačnog niza vrtloga .....	328
3.16.4.	Metod hidrodinamičkih singulariteta pri osnosimetričnom strujanju – podužno opstrujavanje obrtnih tela .....	328
3.16.5.	Dejstvo struje neviskoznog fluida na cilindrično telo – formula Blazijus-Čapljigina: a) <i>Blazijus-Čapljiginovi obrasci</i> ; b) <i>Primena Košijeve teoreme o reziduumu</i> .....	331
3.16.6.	Fizičko značenje reziduuma kompleksne brzine .....	334
3.16.7.	Opšti izrazi za kompleksni potencijal i kompleksnu brzinu .....	335
3.16.8.	Opstrujavanje proizvoljne zatvorene konture jednolikom pravolinijskom strujom. Paradoksi modela neviskozne tečnosti. Obrazac Kuta-Žukovskog. Postupak praktičnog određivanja sile i momenta .....	337
3.16.9.	Konformno preslikavanje – opstrujavanje proizvoljne konture: a) <i>Opstrujavanje elipse ili prave, tj. beskonačno tanke ravne ploče</i> ; b) <i>Opstrujavanje nekih krivih trećeg reda</i> ; c) <i>Opstrujavanje konture oblika parabole</i> ; d) <i>Opstrujavanje konture oblika hiperbole i strujanje u uglovima</i> ....	340

3.16.10.	Primena metode konformnog preslikavanja i postulata Žukovskog -Čapljigina: <b>a)</b> <i>Ciklično strujanje oko eliptičkog cilindra</i> ; <b>b)</b> <i>Ciklično opstrujavanje ravne ploče</i> ; <b>c)</b> <i>Aciklično strujanje oko ravne ploče</i> ; <b>d)</b> <i>Sila, moment, koeficijent uzgona i koeficijent momenta pri cikličnom opstrujavanju ravne ploče</i> .....	343
<b>3.17.</b>	<b>Primene metoda singulariteta i teorije analitičkih funkcija u hidromehanici</b> .....	<b>351</b>
	1. Određivanje sile dejstva hidrodinamičkih singulariteta na opstrujavano telo. Lagalijeve formule; 2. Primene Lagalijevih formula u slučaju ravanskog strujanja; 3. Uzajamno dejstvo hidrodinamičkih singulariteta i nepokretnih čvrstih površi. Metoda lika (slike) – princip simetrije (refleksije); <b>3.1.</b> <i>Princip simetrije – metod hidrodinamičkog lika u odnosu na ravnu površ (zid). Teorema o pravoj</i> ; <b>3.2.</b> <i>Metod lika u odnosu na krivu čvrstu površ – lik hidrodinamičkog singulariteta u odnosu na kružni cilindar. Teorema o kružnici.</i>	
3.17.1.	Primeri primene teoreme o kružnici: <b>a)</b> <i>Kružni cilindar u polju jednolike struje</i> ; <b>b)</b> <i>Strujanje izazvano osamljenim vrtložnim vlaknom u prisustvu kružnog cilindra</i> ; <b>c)</b> <i>Kružni cilindar u polju dva vrtloga</i> ; <b>d)</b> <i>Par vrtloga umutar cilindra</i> ; <b>e)</b> <i>Strujanje izazvano dvopolom u prisustvu kružnog cilindra</i> .....	356
3.17.2.	Uzajamno dejstvo hidrodinamičkih singulariteta i ravnih čvrstih površi: <b>a)</b> <i>Međudejstvo izvora (ponora) i ravnog zida</i> ; <b>b)</b> <i>Metod uzastopnih (sukcesivnih) likova izvora u odnosu na paralelne ravni</i> ; <b>c)</b> <i>Uzajamno dejstvo dvopola i ravnog čvrstog zida</i> ; <b>d)</b> <i>Međudejstvo vrtloga i ravnog zida</i> .....	357
3.17.3.	Sila pritiska na kružni cilindar postavljen u polje izvora. Metoda lika u odnosu na kružnicu .....	365
3.17.4.	Kružni cilindar u polju osamljenog neograničenog pravolinijskog vrtložnog vlakna .....	366
3.17.5.	Kružni cilindar u strujnom polju izvora – metoda lika .....	366
3.17.6.	Sila na kružni cilindar postavljen u strujno polje dvopola .....	367
3.17.7.	Aciklično i ciklično opstrujavanje kružnog cilindra vrtlogom .....	368
3.17.8.	Vrtložno vlakno u jednolikoj pravolinijskoj struji .....	371
3.17.9.	Par vrtložnih vlakana u jednolikom strujanju. Dvopol kao granična vrednost .....	372
3.17.10.	Sila na kružni cilindar u prisustvu čvrste ravne površi; par suprotnosmernih vrtloga jednakog intenziteta .....	375
3.17.11.	Razni slučajevi opstrujavanja kružnog cilindra spoljašnjim izvorom i ponorom .....	376
3.17.12.	Opstrujavanje eliptičkog cilindra jednolikom pravolinijskom strujom .....	380
3.17.13.	Sila na ploču postavljenu u jednoliko strujanje .....	381
3.17.14.	Ciklično strujanje oko ravne ploče. Konformno preslikavanje i teorema o kružnici .....	382
3.17.15.	Opstrujavanje paraboličkog profila .....	383

3.17.16.	Primena konformnog preslikavanja pri formiranju jednog od profila Žukovskog .....	383
3.17.17.	Analiza nekih kompleksnih potencijala .....	384
3.17.18.	Primena principa simetrije, tj. metode lika pri formiranju različitih klasa strujanja .....	386
3.17.19.	Metoda lika i konformno preslikavanje .....	386
3.17.20.	Preslikavanje kružnice Loranovim redom u aeroprofil .....	387
3.17.21.	Ciklično opstrujavanje ograničenih kontura .....	388
3.17.22.	Opstrujavanje neograničenih i poluograničenih kontura, tj. tela .....	388
3.17.23.	Medudejstvo pravolinijskih vrtložnih vlakana .....	389
3.17.24.	Periodično strujanje .....	389
3.17.25.	Princip simetrije i periodično strujanje .....	390
3.17.26.	Brzina kretanja pravolinijskog vrtložnog vlakna koje se nalazi izvan nepokretnog kružnog cilindra .....	391
3.17.27.	Niz vrtloga u jednolikom strujanju – rešetka profila .....	392
3.17.28.	Kretanje sistema vrtloga .....	392
3.17.29.	Opstrujavanje izvorom konture sastavljene od prave linije i polukruga koja predstavlja trag ravno-cilindrične površi u strujnoj ravni .....	393
3.17.30.	Sila na cilindar postavljen u složeno strujno polje .....	395
<b>LITERATURA</b> .....		<b>399</b>

Gubitak energije po jedinici dužine može da se izrazi pomoću funkcije disipacije  $\phi$ , koja se u ovom slučaju svodi na izraz  $\eta(\partial v_x/\partial y)^2$ , tako da je gubitak energije jednak

$$\int_0^h \phi dy = \eta \int_0^h (\partial v_x/\partial y)^2 dy = (\rho g \sin \alpha)^2 h^3/3\eta.$$

Očigledno je da se isti rezultat dobija i kada se neposredno razmatra rad sile trenja  $F_\lambda$

$$\int_0^h F_\lambda dv_x = \eta \int_0^h (\partial v_x/\partial y) dv_x = \eta \int_0^h (\partial v_x/\partial y)^2 dy.$$

**2.13.22.** Poprečni presek *prstenaste elastične cevi* dužine  $l_1 + l_2$  sužava se na deonici dužine  $l_1$  sa prečnika  $d_2$  na prečnik  $d_1$ . Suženje se rasprostire, tj. kreće brzinom  $v_s$  duž cevi, koja je ispunjena njutnovskim fluidom viskoznosti  $\eta$ . Pretpostavlja se da se, kako u suženom, tako i u proširenom delu cevi, uspostavlja *Puazejevo strujanje*. Gubici energije na mestima promene preseka se zanemaruju. a) Koliku razliku pritisaka  $p_u - p_i$  proizvodi ova jednostavna peristaltička pumpa (sl. 2.13.22)? b) Izračunati zapreminski protok  $\dot{V}_2$  kroz presek  $A - A$ . Zadate veličine su:  $l_1 = 8$  cm,  $l_2 = 50$  cm,  $d_1 = 6$  mm,  $d_2 = 20$  mm,  $v_s = 0,7$  m/s,  $\eta = 0,1$  Ns/m<sup>2</sup>.

**REŠENJE:** a) Tražena razlika pritisaka saglasno formulama (2.13.18) iznosi

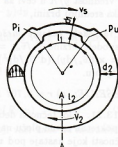
$$p_u - p_i = 32\eta v_s \frac{l_2}{d_2^2} \frac{1 - (d_1/d_2)^2}{1 + l_2 d_1^4/l_1 d_2^4} = 24,3 \text{ mbar.}$$

b) U skladu sa izrazima (2.13.18) izvedenim za Puazejevo strujanje zapreminski protok određen je formulom (Hagen-Puazej)

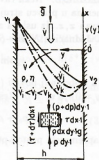
$$\dot{V}_2 = \frac{\pi}{128} \frac{p_u - p_i}{\eta l} d_2^4 = \pi R_2^2 v_s \frac{1 - (R_1/R_2)^2}{1 + l_2 R_1^4/l_1 R_2^4}$$

u kojoj je  $R_i = d_i/2$ ,  $i = 1, 2$ . Za date brojne podatke sledi  $\dot{V}_2 = 190$  cm<sup>3</sup>/s.

**2.13.23.** Nestišljiv *Njutnovski* fluid gustine  $\rho$  i konstantne dinamičke viskoznosti  $\eta$  nalazi se između dve vertikalne međusobno paralelne ploče, od kojih se leva kreće konstantnom brzinom  $v_1$  u pozitivnom, a desna brzinom  $v_2$  u negativnom smeru  $x$ -ose (sl. 2.13.23). Ploče su na rastojanju  $h$  i medijum se nalazi u polju sile Zemljine teže  $\vec{g}$ . a) Pod pretpostavkom da je *strujanje stacionarno, laminarno i potpuno razvijeno* odrediti onaj gradijent pritiska  $dp/dz$ , pri kome se uspostavlja zadati zapreminski protok  $V$  za jediničnu visinu ( $z = 1$ ) u negativnom smeru ose  $x$ ; b) Skicirati kvalitativno raspodelu brzine između



Slika 2.13.22.



Slika 2.13.23.

zidova za razne protoke. Zadate veličine su  $\rho$ ,  $\eta$ ,  $h$ ,  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $\dot{V}$  i  $g$ .

**REŠENJE:** a) U saglasnosti sa jednačinom dinamičke ravnoteže bilans sila na izdvojeni element fluida glasi (sl. 2.13.23)

$$-g\rho dx dy + p dy - (p + dp) dy - \tau dx + (\tau + d\tau) dx = 0. \quad (1)$$

Uvrštavanjem  $\tau = \eta dv/dy$  u jednačinu (1) dobija se diferencijalna jednačina

$$d^2 v/dy^2 = \eta^{-1}(dp/dx + \rho g),$$

čijim se integraljenjem i korišćenjem graničnih uslova  $v(y=0) = -v_2$  i  $v(y=h) = v_1$  dobija

$$v(y) = -v_2 + \left[ v_1 + v_2 - \frac{h^2}{2\eta} \left( \frac{dp}{dx} + \rho g \right) \right] \frac{y}{h} + \frac{h^2}{2\eta} \left( \frac{dp}{dx} + \rho g \right) \left( \frac{y}{h} \right)^2. \quad (2)$$

Zadati protok  $\dot{V}$  u negativnom smeru  $x$ -ose definisan je pomoću (2) izrazom (3)

$$-\dot{V} = \int_{y=0}^h v(y) dy = -v_2 h + \left[ v_1 + v_2 - \frac{h^2}{2\eta} \left( \frac{dp}{dx} + \rho g \right) \right] \frac{h}{2} + \left( \frac{dp}{dx} + \rho g \right) \frac{h^3}{6\eta}, \quad (3)$$

iz kojeg sledi traženi izraz za gradijent pritiska u funkciji zadatih veličina

$$dp/dx = (12\eta/h^3)[\dot{V} + (v_1 - v_2)h/2] - \rho g.$$

b) Profili brzine  $v(y)$  za različite vrednosti protoka  $\dot{V}$  za slučaj  $v_1 = v_2$  kvalitativno su prikazani na slici 2.13.23.

**2.13.24.** Cilindrični rezervoar poluprečnika  $R_0$  obrće se konstantnom ugaonom brzinom  $\omega$  oko svoje vertikalne ose. Tečnost gustine  $\rho$  i viskoznosti  $\eta$  nalazi se na visini  $h$  od dna suda duž ose obrtanja i ističe kroz horizontalnu cev dužine  $l$  i malog poluprečnika  $R$ . a) Odrediti zavisnost natpritiska  $p(x) - p_s$  u cevi od koordinate  $x$ ; b) Izračunati zapreminski protok  $\dot{V}$  koji pri tome nastaje. Zadate brojne vrednosti su  $h = 0,5$  m,  $l = 0,3$  m,  $R = 0,5$  mm,  $R_0 = 0,2$  m,  $\eta = 10^{-3}$  Ns/m<sup>2</sup>,  $\rho = 1$  Mg/m<sup>3</sup> i  $\omega = 10$  rad/s.

**REŠENJE:** a) Pretpostavlja se da je u cevi formirano potpuno razvijeno laminarno strujanje, tj. da je dužina ulazne deonice  $l_p$  zanemarljivo mala u odnosu na dužinu  $l$  (videti Odeljak 2.15.).

Osim površinskih sila pojavljuje se u ovom slučaju i masena sila, tj. centrifugalna sila  $\omega^2(R_0 + x)$ , tako da iz uslova dinamičke ravnoteže izdvojenog fluida u obliku cilindra infinitezimalne dužine  $dx$  sledi, saglasno oznakama na slici 2.13.24, sledeća relacija

$$2\pi r dx \cdot \tau(r) + \rho \pi r^2 dx \cdot \omega^2(R_0 + x) = \pi r^2 \cdot dp$$

$$\text{tj.} \quad 2\tau(r)/r = dp/dx - \rho \omega^2(R_0 + x). \quad (1)$$

Ako se za označavanje reda veličine koristi simbol " $\sim O(\epsilon)$ " onda se, saglasno relacijama (4) u problemu 2.17.3., dobijaju zavisnosti

$$\epsilon = \delta/l \ll 1, \quad x^* \sim O(1), \quad y^* \sim O(\epsilon), \quad v_x^* \sim O(1). \quad (1)$$

Pošto je u jednačini kontinuiteta (2.17.10)  $\partial v_x^*/\partial x^* \sim O(1)$ , onda je i  $\partial v_y^*/\partial y^* \sim O(1)$ . Odavde sledi red veličine poprečne brzine  $v_y$ , tj.  $v_y^* \sim O(\epsilon)$ . Pomoću ovog rezultata i relacija (1) može se odrediti red veličine svakog od članova u jednačinama (2.17.9)

$$\begin{aligned} v_x^* \frac{\partial v_x^*}{\partial x^*} &\sim O(1)O\left(\frac{1}{1}\right) \sim O(1)O(1) \sim O(1), \quad v_y^* \frac{\partial v_x^*}{\partial y^*} \sim O(\epsilon)O\left(\frac{1}{\epsilon}\right) \sim O(1), \quad \frac{\partial E_u}{\partial x^*} \sim O(1), \\ \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial x^{*2}} &\sim O(1), \quad \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial y^{*2}} \sim O\left(\frac{1}{\epsilon^2}\right), \quad v_x^* \frac{\partial v_y^*}{\partial x^*}, \quad v_y^* \frac{\partial v_y^*}{\partial y^*}, \quad \frac{\partial^2 v_y^*}{\partial x^{*2}} \sim O(\epsilon), \\ \frac{\partial E_u}{\partial y^*}, \quad \frac{\partial^2 v_y^*}{\partial y^{*2}} &\sim O\left(\frac{1}{\epsilon}\right), \quad \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v_x^*}{\partial y^{*2}} \right) \sim O(1) \Rightarrow Re \sim O(1/\epsilon^2) \end{aligned} \quad (2)$$

Iz relacija (2) sledi zavisnost (2.17.5)  $\partial p/\partial y = 0$ , kao i rezultat da  $Re$ -broj treba da ima najveći red veličine  $1/\epsilon^2$ , da bi bio zadovoljen postulat teorije graničnog sloja, saglasno kome su u graničnom sloju viskozne sile i sile inercije veličine istog reda.

Kada se u (2.17.9) zanemare svi članovi čiji je red veličine manji od jedan i tako dobijena jednačina napiše u dimenzijskom obliku, dobija se tražena jednačina (2.17.6). Pri tome jednačina (2.17.10) prelazi u jednačinu (2.17.7).

## 2.17.5. Struktura i razvoj graničnog sloja pri prelazu laminarnog strujanja u turbulentno

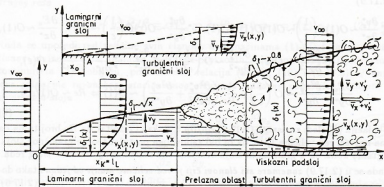
Razvoj profila brzine u graničnom sloju razmatran je u problemima 2.17.1. i 2. Pretpostavljajući transformaciju laminarnog graničnog sloja u turbulentni skicirati razvoj takvog "mešovito" graničnog sloja na ravnoj ploči i opisati njegovu strukturu.

**REŠENJE:** Struktura strujanja u graničnom sloju na raznim rastojanjima  $x$  od prednje ivice ploče može da bude različita.

Na slici 2.17.5 prikazana je shema razvitka graničnog sloja na gornjoj površi ravne polubeskonačne ploče pri njenom opstrujavanju viskoznom fluidom. Na delu  $x = x_k = l_L$  struktura strujanja u graničnom sloju odgovara slojevitom, laminarnom strujanju sa karakterističnom raspodelom brzine  $v_x(x, y)$ . Zakon promene debljine  $\delta_l$  laminarnog graničnog sloja određen je relacijom (2.17.1), tj.  $\delta_l/x \sim 1/\sqrt{Re_x} = 1/\sqrt{v_\infty x/\nu}$ , odakle sledi  $\delta_l \sim \sqrt{x}$ . Zbog razvoja graničnog sloja i zbog jednačine kontinuiteta dolazi do izvesnog povećanja rastojanja između strujnica u blizini čvrste površi. Usled ovoga nastaje poprečna brzina  $v_y$  čiji je red veličine dat formulom (5), tj. (5') u problemu 2.17.3. Pored promene debljine graničnog sloja nastaje i promena režima strujanja u njemu. Naime, sa porastom



koordinate  $x$  povećava se i Reynoldsov broj  $Re_x$ , čime se narušava *stabilnost laminarnog strujanja*, i ono postepeno prelazi u *turbulentno*. U prelaznoj oblasti strujnice dobijaju talasast oblik, kao posledicu gubitka stabilnosti, a potom se razvija stabilno turbulentno strujanje. Rastojanje  $x_k = l_L$  zavisi uglavnom od intenziteta, tj. stepena turbulencije spoljašnjeg, neporemećenog strujanja i hrapavosti čvrste površi. Red veličine kritičnog Reynoldsovog broja  $Re_k = v_{\infty} x_k / \nu$ , pri kome dolazi do prelaska laminarnog strujanja u turbulentno, nalazi se u granicama  $10^5 \div 10^6$ .



Slika 2.17.5.

Za  $x > (\nu Re_k / v_{\infty})$  formira se turbulentni granični sloj, u kome usled fluktuacija brzine  $v'_x$  i  $v'_y$  dolazi do intenzivnih turbulentnih transportnih procesa. Mehanizam turbulentne razmene i prenosa materije, energije i količine kretanja dovodi do znatno ravnomernijeg profila brzine  $\bar{v}_x(x, y)$  i znatno većih gradijenata brzine u blizini zida, tj. površi ploče, nego u slučaju laminarnog graničnog sloja. Dakle, *tangencijalni napon* na površi ploče znatno je veći u turbulentnom nego laminarnom graničnom sloju, pa određivanje mesta prelaska laminarnog u turbulentno strujanje predstavlja ne samo teorijski, već i veliki praktični interes.

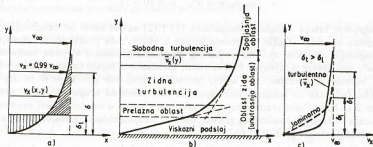
Usled *turbulentne difuzije* i *konvekcije* dolazi do bržeg povećanja debljine turbulentnog graničnog sloja  $\delta_t(x)$  u odnosu na debljinu  $\delta_l$  pri laminarnom strujanju. Turbulencija u graničnom sloju je tipičan primer *nehomogene*, tj. *neizotropne turbulencije*. U neposrednoj blizini čvrste površi intenzitet turbulentne razmene se smanjuje, a uticaj viskoznosti raste, tako da se celokupna strujna oblast deli na *viskozni podslaj*, turbulentni granični sloj i spoljašnje neporemećeno strujanje. U viskoznom podslaju, čija je debljina vrlo mala, tangencijalni napon je određen samo viskoznošću i može se smatrati konstantnim i jednakim naponu na zidu, tj. na površi ploče  $\tau = \rho \nu \partial v_x / \partial y = \tau_w$ . U turbulentnom sloju fluktuacije brzine stvaraju znatne turbulentne tangencijalne napone, dok je uticaj viskoznih tangencijalnih napona zanemarljivo mali. Spoljašnje strujanje se može smatrati potencijalnim, jer je uticaj tangencijalnih napona u toj oblasti veoma

mali. Granice između ovih oblasti imaju uslovni karakter i određuju se unapred zadatom tačnošću proračuna. Prikaz ovih oblasti i odgovarajućih profila brzine dat je na slici 2.17.5. Primenom integralne jednačine količine kretanja pokazuje se da se *debljina turbulentnog graničnog sloja* menja po zakonu  $\delta_t \sim x^{4/5} = x^{0,8}$  (v. primere 2.17.17. i 19.).

## 2.17.6. Profili brzine i integralne karakteristike graničnog sloja

Objasniti i nacrtati karakteristične oblasti turbulentnog graničnog sloja, kao i profile brzina u turbulentnom i laminarnom graničnom sloju. Napisati izraze za *debljinu istiskivanja*  $\delta_1$  i *debljinu gubitka impulsa*  $\delta_2$ .

**REŠENJE:** U turbulentnom graničnom sloju, za razliku od laminarnog, struktura strujanja fluida se menja sa rastojanjem od čvrste površi. Strujanje u turbulentnom graničnom sloju deli se u tri karakteristične oblasti (v. sl. 2.17.6b): 1 – vrlo tanki *viskozni podsloj* debljine  $(0,001 \div 0,01)\delta$ , u kojem je dominantno dejstvo viskoznih sila, 2 – *oblast zidne turbulencije* koja predstavlja manji deo potpuno razvijenog turbulentnog strujanja i 3 – *oblast slobodne turbulencije* koja obuhvata veći deo turbulentnog graničnog sloja dalje od zida sve do prelaska u slobodno strujanje van graničnog sloja. Prelaz iz jedne u drugu oblast je postepen, iako svaka od njih ima svoja karakteristična svojstva. Pri tome *prelazna oblast* izražava specifična svojstva prelaska viskoznog podsloja u oblast graničnog sloja sa izraženom turbulencijom.



Slika 2.17.6. a) Debljina graničnog sloja  $\delta$  i debljina istiskivanja  $\delta_1$ ; b) Karakteristične oblasti strujanja u turbulentnom graničnom sloju; c) Profili brzine i debljina laminarnog i turbulentnog graničnog sloja.

U vrlo tankom viskoznom podsloju *tangencijalni napon* se malo menja, tj. ostaje *konstantan* i jednak naponu na zidu  $\tau_w = \eta(\partial \bar{v}_x / \partial y)_{y=0}$ , pa je, u skladu sa Njutnovom formulom trenja, *raspodela brzine* u njemu *linearna*

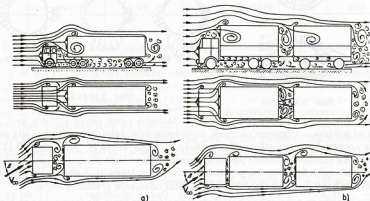
$$\bar{v}_x = \frac{\tau_w}{\eta} y = \frac{v_*^2}{\nu} y, \quad v_* = (\tau_w / \rho)^{1/2} \quad \leftarrow (2.13.48). \quad (1)$$

u kome je  $c_p$  koeficijent otpora pritiska, a  $A_\infty$  je površina projekcije opstrujavanog tela na ravan upravnu na vektor brzine dolazećeg, neporemećenog strujanja (v. problem 2.17.12.).

Vrednosti koeficijenta otpora pritiska za izvesna tela sa oštrim ivicama kod kojih je, dakle, *otpor pritiska dominantan u odnosu na otpor trenja*, date su u tabeli 2.17.11. Koeficijent  $c_p$  zavisi od *Re*-broja i oblika opstrujavanog tela. U slučaju većih Reynoldsovih brojeva koeficijent otpora pritiska zavisi samo od *oblika tela* (v. tabelu 2.17.11).

Tabela 2.17.11.

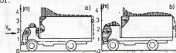
Oblik opstrujavanog ⇒ tela	Disk upravna na struju fluida	Pravougaona ploča normalna na struju sa odnosom a/b					Kružni cilindar sa osom paralelnom struji fluida pri l/d			
		1	2	4	10	∞	1	2	4	7
Koeficijent otpora pritiska $c_p$ ⇒	1,11	1,10	1,15	1,19	1,29	2,01	0,91	0,85	0,87	0,99



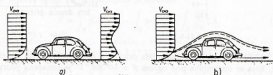
Slika 2.17.11.3.

Skice strujnih slika koje nastaju pri opstrujavanju teretnih motornih vozila sa i bez prikolice prikazane su na slici 2.17.11.3. Vizualizacijom strujanja utvrđene su različite strukture i hijerarhije vrtloga u zavisnosti od oblika vozila i ugla pod kojih se opstrujava. Drugi crtež na slikama 2.17.11.3a i 2.17.11.3b označava osnosimetrično opstrujavanje, dok se treći crtež odnosi na opstrujavanje vozila strujom vazduha brzine  $v_\infty$  pod uglom  $\beta$ . Odvajanje graničnog sloja i formiranje mnogobrojnih makrovrtloga dovodi do složenih raspodjela pritiska na svim površinama vozila, koje znatno povećavaju aerodinamički otpor kretanju vozila. Nastajanje graničnog sloja sa donje strane izaziva smanjenje brzine i odgovarajuće povećanje pritiska, koji

dovodi do strujanja vazduha vertikalno naviše, čime se stvara dodatni otpor i povećana zaprljanost vozila. Veliki uticaj na strukturu strujnog polja i karakter otpora ima bočni vetar (v. ugao  $\beta$  na sl. 2.17.11.3). Naime, pravilna raspodela makrovrtloga se narušava, oni se pomeraju ka "zavetrinskoj" strani i započinju kretanje duž bočne strane, što znatno uvećava oblast čeonog otpora karoserije i bitno povećava otpor.



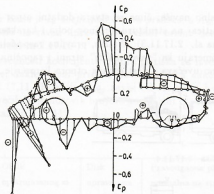
Slika 2.17.11.4.



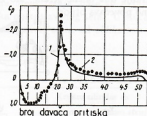
Slika 2.17.11.5.

Uticaj graničnog sloja na opstrujavanje automobila prikazan je na slici 2.17.11.4. Pokazano je da granični sloj formiran na platformi vozila ima dvostruki uticaj. Naime, usled gubitka brzine u graničnom sloju menja se sila aerodinamičkog otpora i položaj njene napadne tačke (v. sl. 2.17.11.4a), tj. smanjuje se otpor. S druge strane, međutim, strujnice se, za debljinu istiskivanja (v. izraz 2.17.11) pomeraju vertikalno naviše što dovodi do povećanja sile uzgona i sile otpora (v.sl. 2.17.11.4b – puna linija označava uzimanje u obzir graničnog sloja, dok linija crta-crta označava njegovo zanemarivanje, tj. proračun strujanja neviskoznog fluida). U ovom slučaju se menja položaj zaustavne tačke, protok vazduha, oblast odvajanja struje na krovu, brzina strujanja ispod šasije automobila, prenos toplote i isticanje izduvnih gasova. Na osnovu raspodele pritiska zaključuje se o veličini otpora, strukturi i broju makrovrtloga, kao i o stepenu zagadjenosti kabine i karoserije. Polje natpritiska označeno je znakom "+", a potpritiska znakom "-" (v.sl. 2.17.11.5). Vidi se da na karakter raspodele pritiska utiče čitav niz konstruktivnih parametara. Za slučaj kabine koja ima bolje opstrujavani, tj. "strujolikiji" oblik dolazi do smanjenja pritiska na čeonom delu kabine i stvaranja potpritiska na njenom krovu. Pri tom, ipak, raste potpritisak na prednjem delu krova karoserije (v.sl. 2.17.11.5a). Kod lošije opstrujavane kabine povećava se pritisak u tačkama njene čeonne ploče, i istovremeno se smanjuje oblast natpritiska i potpritiska na prednjem delu karoserije (v. sl. 2.17.11.5b).

Raspodela pritiska duž podužne ose automobila omogućava da se proračuna, odnosno proceni aerodinamički otpor i uzgonska sila. Raspodela statičkog pritiska u ravni simetrije površi sportskog automobila omogućuje konstruktoru i izbor optimalnih mesta za postavljanje dovodnih i odvodnih otvora za struju vazduha i rešavanje problema ventilacije u vozilu (v.sl. 2.17.11.6).



Slika 2.17.11.6.



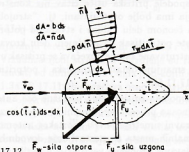
Slika 2.17.11.7.

Na slici 2.17.11.7 prikazana je raspodela pritiska u ravni simetrije na površi jedne prikolice, koja se opstrujava pod uglom  $\beta = 10^\circ$ . Sa "1" je označena proračunska kriva, a "2" predstavlja skup eksperimentalno odredjenih tačaka. Brojevi od 1 do 65 označavaju davače pritiska. Slika pokazuje da odstupanje proračunskih vrednosti od eksperimentalnih nastaje uglavnom na delu koji odgovara površini krova. Pomoću raspodela pritiska, tj. koeficijenta  $c_p$  u horizontalnim ravnima i poprečnim presecima zaključuje se o odvajanju struje i veličini otpora pritiska. Dalja analiza, međutim, prevazilazi namenu i okvire ove knjige.

## 2.17.12. Dejstvo viskozne tečnosti na opstrujavano telo. Sila otpora kretanju tela

U primerima 2.17.2., 7., 9.-11. razmatrana je fizikalnost mehanizma nastajanja sile otpora pri opstrujavanju tela viskoznom fluidom. Na osnovu opšteg naponskog stanja (v. problem 2.12.7. i sl. 2.12.7a,b) i relacija (2.12.1-4, 14, 17) za vektor napona odrediti ukupnu silu kojom viskozna tečnost deluje na opstrujavano telo.

**REŠENJE:** Sila otpora  $\vec{F}_w$  deluje na telo u pravcu brzine neporemećenog strujanja  $\vec{v}_\infty$ , odnosno u pravcu kretanja tela (v.sl. 2.17.12). Za slučaj dozvučnog strujanja fluida sila otpora se sastoji od sile, tj. otpora trenja  $\vec{F}_r$  i otpora pritiska  $\vec{F}_p$ . Sila uzgona  $\vec{F}_u$  upravna je na pravac brzine  $\vec{v}_\infty$ , tj. na pravac kretanja tela. Rezultujuća sila pritiska nije jednaka nuli kao

Slika 2.17.12.  $\vec{F}_w$ -sila otpora  $\vec{F}_u$ -sila uzgona

b) Rastavljanjem kompleksnog potencijala

$$w(z) = \ln(z+1-i)(z-1+i)$$

na realni i imaginarni deo pomoću relacija  $z+1-i=r_1 e^{i\theta_1}$  i  $z-1+i=r_2 e^{i\theta_2}$ , gde su  $\theta_1 = \arctg \frac{y-1}{x+1}$  i  $\theta_2 = \arctg \frac{y+1}{x-1}$ , dobija se strujna funkcija u obliku

$$\psi(x, y) = \arctg \frac{y-1}{x+1} + \arctg \frac{y+1}{x-1} = \arctg \frac{2(1+xy)}{x^2-y^2}.$$

Strujnice  $\psi = C$  su hiperbole  $(x^2 - y^2) \operatorname{tg} C - 2xy - 2 = 0$ , koje prolaze kroz tačke  $z_1$  i  $z_2$  u kojima su izvori smešteni. Nulta strujnica  $\psi = 0$  određena je jednačinom  $y = -1/x$ . Strujna slika 13.25 odgovara sl. 13.18, samo su izvori različito razmešteni. Protok i cirkulacija duž konture datog kruga, koji obuhvata samo jedan izvor, iznose  $\dot{V} = e = 2\pi$  i  $\Gamma = 0$ .

c) Posle logaritmovanja funkcije preslikavanja i iskorišćenja uslova  $w(z) = W(Z)$  i  $(dW/dZ)_{Z=0} = 0$  sledi izraz za kompleksni potencijal

$$W(Z) = \frac{1}{2}(1-i)Z + \frac{1+i}{Z-(1+i)}$$

iz čijeg oblika se zaključuje da je preslikano strujanje aciklično strujanje oko cilindra. Jednotika struja ima komponente brzine  $V_{\infty X} = V_{\infty Y} = 1/2$  tj. ima pravac ose dvopola smeštenog u tački  $Z = 1+i$ . Slika strujanja, uključujući i smer strujnica, odgovara slici 13.9b, pri čemu su nagibi ose dvopola, položaji tačaka u kojima su dvopoli smešteni kao i poluprečnici cilindara tj. položaji zadnjih zaustavnih tačaka u ova dva analogna strujanja različiti.

13.26. U strujno polje osamljenog izvora izdašnosti  $e$  smeštenog u tački  $z = -a$ , gde je  $a > 0$ , postavljen je kružni cilindar čija je kontura u kompleksnoj ravni  $z$  određena jednačinom  $x^2 + y^2 = R^2$  sa  $R < a$ , a osa upravna na ravan strujanja.

a) Odrediti kompleksni potencijal  $w(z)$  zadatog strujanja,

b) Naći strujnu funkciju  $\psi(x, y)$ , nultu strujnicu, zaustavne tačke i skicirati strujnu sliku sa smerom strujnica, i

c) Kako glasi funkcija preslikavanja  $Z = Z(z)$  kojom se zadato strujanje preslikava u strujno polje dva ponora jednakih izdašnosti  $e$ , smeštenih u tačkama  $Z = -1$  i  $Z = 1$  kompleksne ravni  $Z$ .

Rešenje:

a) Kompleksni potencijal strujanja u polju osamljenog izvora glasi  $w_1(z) = \frac{e}{2\pi} \ln(z+a)$  pa je zadatostrujanje određeno kompleksnim potencijalom u obliku

$$w(z) = w_1(z) + g(z) = \frac{e}{2\pi} \ln(z+a) + g(z), \quad (1)$$

gde je  $g(z)$  regularna analitička funkcija izvan kruga  $|z| \leq R$ . Krug  $|z| = R$  po uslovu zadatka mora da bude strujnica tj. strujna funkcija  $\psi$  je u tačkama kruga jednaka nekoj konstanti za koju, bez ograničenja opštosti, može da se pretpostavi da je jednaka nuli na osnovu čega sledi

$$\psi = [w(z) - \overline{w(z)}] / 2i = 0 \quad \text{tj.} \quad w(z) - \overline{w(z)} = 0, \quad \text{za } |z| = R.$$

Ovaj uslov posredstvom (1) može da se napiše u obliku

$$\left[ \frac{\epsilon}{2\pi} \ln(z+a) - g(z) \right] - \left[ \frac{\epsilon}{2\pi} \ln(\bar{z}+a) - g(z) \right] = 0, \text{ za } |z| = R.$$

Kako u tačkama konture važi relacija  $z \bar{z} = R^2$  to se dobija

$$\left[ \frac{\epsilon}{2\pi} \ln\left(\frac{R^2}{z} + a\right) - g(\bar{z}) \right] - \left[ \frac{\epsilon}{2\pi} \ln\left(\frac{R^2}{z} + a\right) - g(z) \right] = 0.$$

Oдавде sleduje da je na konturi zadovoljen uslov

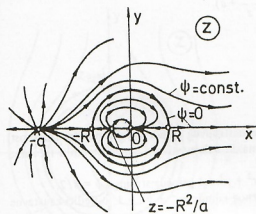
$$\frac{\epsilon}{2\pi} \ln\left(\frac{R^2}{z} + a\right) - g(z) = 0$$

iz kojeg, saglasno teoremi jedinstvenosti analitičkih funkcija, sledi

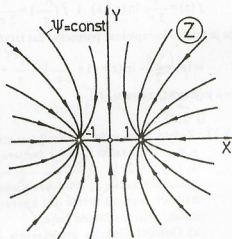
$$g(z) = \frac{\epsilon}{2\pi} \ln\left(z + \frac{R^2}{a}\right) - \frac{\epsilon}{2\pi} \ln z + \frac{\epsilon}{2\pi} \ln a, \text{ za } |z| \geq R.$$

Kompleksni potencijal (1) za zadato strujanje glasi

$$w(z) = \frac{\epsilon}{2\pi} \ln \frac{(z+a)(z+R^2/a)}{z} + \frac{\epsilon}{2\pi} \ln a, \quad (1')$$



Slika 13.26a



Slika 13.26b

Iz izraza (1') proističe da opstrujavanje kružnog cilindra izvorom nastaje kada se strujanju u polju datog izvora superponiraju strujna polja izvora i ponora jednakih izdašnosti smeštenih u tačkama  $z = -R^2/a$  i  $z = 0$ .

b) Strujna funkcija određena je izrazom  $\psi = \frac{\epsilon}{2\pi} (\theta_3 + \theta_2 - \theta_1)$  koji, posredstvom  $\theta_1 = \arctg(y/x)$ ,  $\theta_2 = \arctg[y/(x + R^2/a)]$  i  $\theta_3 = \arctg[y/(x+a)]$ , glasi

$$\psi(x, y) = \frac{\epsilon}{2\pi} \arctg \frac{y(x^2 + y^2 - R^2)}{(x + R^2/a)(x^2 + ax + y^2) + ay^2}.$$

Nulta strujnica  $\psi = 0$  definisana je jednačinama  $y = 0$  i  $x^2 + y^2 = R^2$ , dok su zaustavne tačke s obzirom na uslov

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\epsilon}{2\pi} \frac{z^2 - R^2}{z(z+a)(z+R^2/a)} = 0$$

date sa  $z = \pm R$ . Na osnovu ove analize strujno polje je prikazano na slici 13.26a.

c) Strujanje u ravni  $Z$  definisano je kompleksnim potencijalom

$$W(Z) = -\frac{\epsilon}{2\pi} \ln(Z+1)(Z-1). \quad (2)$$

Iz izraza (1') i (2) posredstvom (13.19) dobija se tražena funkcija preslikavanja koja može da se napiše u obliku

$$\frac{z}{a(z+a)} = (Z^2 - 1) \left( z + \frac{R^2}{a} \right).$$

Preslikano strujanje prikazuje sl. 13.26b.

Napominje se da se ovaj problem jednostavno rešava primenom Milne-Thomson-ove teoreme (13.22). U ovom slučaju opstrujavanja cilindra izvorom su

$$f(z) = \frac{\epsilon}{2\pi} \ln(z+a) \quad \text{i} \quad \bar{f}\left(\frac{R^2}{z}\right) = \frac{\epsilon}{2\pi} \ln\left(\frac{R^2}{z} + a\right)$$

pa je traženi kompleksni potencijal dat izrazom

$$w(z) = \frac{\epsilon}{2\pi} \ln(z+a) + \frac{\epsilon}{2\pi} \ln\left(\frac{R^2}{z} + a\right),$$

koji je identičan izrazu (1').

13.27. Zadato je ravansko potencijalno strujanje nestišljivog fluida u polju ponora izdašnosti  $\epsilon = -2\pi$  u tački  $z_0 = 0$  i dva izvora jednakih izdašnosti  $\epsilon = 2\pi$  smeštenih u tačkama  $z_1$  i  $z_2 = -2i$ .

a) Odrediti tačku  $z_1$  iz uslova da kontura  $x^2 + y^2 = 1$  pripada strujnici  $\psi = \pi/2$ ,

b) Naći raspored brzine duž konture kružnog cilindra  $x^2 + y^2 = 1$ , odrediti zaustavne tačke i skicirati strujno polje, i

c) Odrediti funkciju preslikavanja  $Z = Z(z)$  tako da se u kompleksnoj ravni  $Z$  dobije strujanje u polju izvora izdašnosti  $\epsilon = 2\pi$  i vrtloga cirkulacije  $\Gamma = 2\pi$  smeštenih u istoj tački  $Z_0 = 1 + i$ . Skicirati strujnu sliku.

Rešenje:

a) Kompleksni potencijal zbirnog strujanja, posredstvom tabele 13.1, ima oblik

$$w(z) = \ln \frac{(z+2i)(z-z_1)}{z} = \ln \frac{r_1 r_2}{r_3} + i(\theta_1 + \theta_2 - \theta_3), \quad (1)$$

gde su  $z+2i = r_1 e^{i\theta_1}$ ,  $z-z_1 = r_2 e^{i\theta_2}$  i  $z = r_3 e^{i\theta_3}$ , odnosno  $\theta_1 = \arctg[(y+2)/x]$ ,  $\theta_2 = \arctg[(y-y_1)/(x-x_1)]$  i  $\theta_3 = \arctg(y/x)$ , pa izraz za strujnu funkciju glasi



$$\psi(x, y) = \arctg \frac{y^3 + yx^2 + (2 - y_1)(x^2 + y^2) - 2(x_1 x + y_1 y)}{x^3 + xy^2 - x_1(x^2 + y^2) + 2(y_1 x - x_1 y)}$$

Iz uslova da na konturi  $x^2 + y^2 = 1$  strujna funkcija ima vrednost  $\pi/2$  sleduju vrednosti  $x_1 = 0$  i  $y_1 = -1/2$  tj.  $z_1 = -i/2$ , tako da strujna funkcija dobija oblik

$$\psi(x, y) = \arctg \frac{y + (y + 5/2)(x^2 + y^2)}{x(x^2 + y^2 - 1)}$$

iz koga se zaključuje da osa  $y$  i krug  $x^2 + y^2 = 1$  predstavljaju strujnicu  $\psi = \pi/2$ .

b) Kompleksna brzina definisana je izrazom

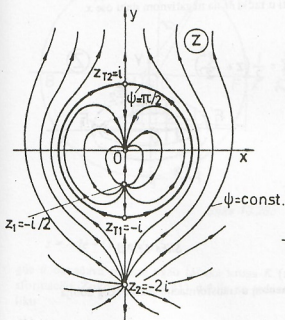
$$dw/dz = (1 + z^2)/(z^3 + \frac{5}{2} i z^2 - z),$$

pa njena vrednost u tačkama kruga  $z = e^{i\theta}$  iznosi

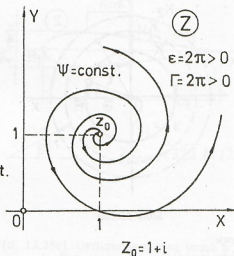
$$\frac{dw}{dz} \Big|_{z=e^{i\theta}} = -\frac{4 \cos \theta}{4 \sin \theta + 5} e^{i(\frac{\pi}{2} - \theta)}$$

Traženi raspored brzine duž zadate konture glasi

$$|\bar{v}| = \left| \left( \frac{dw}{dz} \right)_{z=e^{i\theta}} \right| = \frac{4 \cos \theta}{4 \sin \theta + 5}$$



Slika 13.27a



Slika 13.27b

Zaustavne tačke su  $z_{T1}, z_{T2} = \pm i$ . Na osnovu ovoga skicirano je strujno polje na slici 13.27a, koja prikazuje strujanje oko kružnog cilindra postavljenog u polje izvora (v. zad. 13.26).

c) Kako je strujno polje vrtložnog vlakna združenog sa izvorom opisano kompleksnim potencijalom

$$W(Z) = (1 - i) \ln(Z - 1 - i), \quad (2)$$

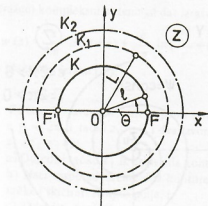
to se posredstvom (1) i (13.19) dobija funkcija preslikavanja u obliku

$$Z = \left| \frac{(z + 2i)(z + i/2)}{z} \right|^{1/(1-i)} + 1 + i.$$

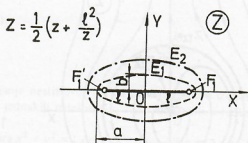
Razlaganjem funkcije (2) dobija se  $\Psi = \theta - \ln r$  odnosno  $r = C_1 e^\theta$  sa  $C_1 = e^{-\Psi}$ , odakle se zaključuje da su strujnice logaritamske spirale prikazane na sl. 13.27b. Znak za  $\epsilon$  i  $\Gamma$  određuje smer strujnica.

13.28. Proučavanje strujanja oko kontura proizvoljnog oblika, naprimer, eliptičkog cilindra, ravne ploče ili profila Žukovskog moguće je, kako je poznato, svesti na istraživanje odgovarajućih ravanskih strujanja oko kružnog cilindra postavljenog u strujno polje jednolike struje, izvora, ponora, vrtloga ili dvopola. U tom cilju potrebno je transformacijom Žukovskog  $Z = (z + l^2/z)/2$  preslikati iz kompleksne ravni  $z$  u kompleksnu ravan  $Z$

- Krug poluprečnika  $l$  sa centrom u koordinatnom početku,
- Krug poluprečnika  $L > l$  sa centrom u koordinatnom početku,
- Krug koji prolazi kroz tačku  $F(l, 0)$  i poluprečnika  $L_1 = l(1 + \epsilon)$ , gde je  $\epsilon$  mala pozitivna veličina, a centar mu se nalazi u tački  $M$  na negativnom delu ose  $x$ .



Slika 13.28a



Slika 13.28b

Rešenje:

a) Kako je za tačke na krugu  $z = le^{i\theta}$  to se zamenom u transformaciju Žukovskog dobija

$$Z = \frac{l}{2} (e^{i\theta} + e^{-i\theta}) = l \cos \theta. \quad (1)$$

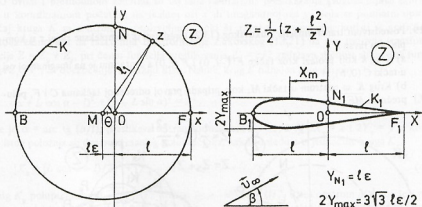
Odavde sledi da se centralni krug  $K$  poluprečnika  $l$  preslikava u duž  $F'_1 F_1 = 2l$  na osi  $X$  (sl. 13.28a, b).

b) Zamenom relacije  $z = Le^{i\theta}$  u izraz (13.21) sledi  $2Z = Le^{i\theta} + l^2 e^{-i\theta}/L$  odnosno  $2X = (L + l^2/L) \cos \theta$  i  $2Y = (L - l^2/L) \sin \theta$ . Posle eliminisanja parametra  $\theta$  dobija se jednačina centralne elipse

$$\frac{X^2}{(L + l^2/L)^2/4} + \frac{Y^2}{(L - l^2/L)^2/4} = 1 \quad (2)$$

sa poluosama  $a = (L + l^2/L)/2$  i  $b = (L - l^2/L)/2$ , koje zadovoljavaju relaciju  $a + b = L$  i  $a^2 - b^2 = l^2$ . Prema tome, koncentrični krugovi  $K_1, K_2, \dots$  poluprečnika većeg od  $l$  preslikavaju se u ellipse  $E_1, E_2, \dots$  sa zajedničkim žižama  $F_1$  i  $F'_1$ .

c) Posredstvom prvog izvoda funkcije (13.21)  $dZ/dz = (1 - l^2/z^2)/2$  vidi se da su tačke  $F$  i  $F'$  sa koordinatama  $z = \pm l$  singularne tačke konformnog preslikavanja (13.21) u kojima konformno preslikavanje nije obezbeđeno tj. uglu  $\pi$  u tim tačkama odgovara ugao  $2\pi$  u tačkama  $F_1$  i  $F'_1$  ravni  $Z$ . Ako se u ravni  $z$  posmatraju krugovi ili druge zatvorene krive, koje prolaze kroz samo jednu singularnu tačku, onda zadatim preslikavanjem nastaju različiti teorijski aeroprofilii. Kao primer takvih profila je simetrični aeroprofil Žukovskog, koji nastaje konformnim preslikavanjem (13.21) kruga  $K$  koji prolazi kroz tačku  $F$  i obuhvata drugu singularnu tačku  $F'$  (sl. 13.28c). Centar kruga  $K$  poluprečnika  $l_1 = l(1 + \epsilon)$  nalazi se u tački  $M$  pomerenoj od koordinatnog početka  $O$  duž realne ose  $x$  za veličinu  $l\epsilon$ . U tom slučaju jednačina kruga  $K$  ima oblik



Slika 13.28c

$$z = -l\epsilon + (1 + \epsilon)l e^{i\theta},$$

gde  $\theta$  označava polarni ugao tačaka kruga  $K$  (sl. 13.28c). Uvrštavanjem ovog izraza u transformaciju Žukovskog (13.21) dobija se jednačina preslikanog kruga u parametarskom obliku

$$Z = \frac{1}{2} \left[ -l\epsilon + (1 + \epsilon)l e^{i\theta} + \frac{l}{-\epsilon + (1 + \epsilon)e^{i\theta}} \right].$$

Posle razvijanja desne strane u stepeni red po  $\epsilon$  i zadržavanja samo linearnih članova po  $\epsilon$ , jer je po pretpostavci  $\epsilon \ll 1$ , dobija se

4. U tačkama  $\pm i, 0$  - izvori i ponori:  $(\pm i; 2\pi)$ ,  $(0; -4\pi)$ ;  $C r^4 - 2 r^2 \cos 2\varphi - 1 = 0$ ,  $(C > -1)$  - ekvipotencijalne linije (za  $C=0$  - hiperbola  $y^2 - x^2 = 1/2$ ),  $r = \sqrt{C \sin 2\varphi - \cos 2\varphi}$  - strujnice (za  $C=0$  - Bernulijeva leminiskata) kojima takodje pripadaju koordinatne ose.

Polje brzine:  $\vec{v} = -2 / \left[ z(z^2 + 1) \right]$ ,  $\vec{v}_\infty = 0$  (v.sl.17.17.4).

5. U tačkama  $\pm(1 \pm i)/\sqrt{2}$  - izvori izdašnosti  $2\pi$ , u tački  $z=0$  - ponor izdašnosti  $-4\pi$ , u  $\infty$  - ponor izdašnosti  $-4\pi$ ;  $r^4 + 1/r^4 = C - 2 \cos 4\varphi$  ( $C > 0$ ) - ekvipotencijalne linije (za  $C < 4$  krive se raspadaju na četiri komponente, pri  $C > 4$  - na dve; pri većim vrednostima  $C$  dobijaju se gotovo kružnice  $r = C^{1/4}$  i  $r = C^{-1/4}$ );  $\operatorname{tg} 2\varphi = C(r^4 - 1)/(r^4 + 1)$  - familija strujnica kojima pripadaju takodje koordinatne ose, simetrale kvadranta i kružnica  $r=1$ . Brzine su  $\vec{v} = 2 \left\{ (z^4 - 1) / [z(z^4 + 1)] \right\}$ ,  $\vec{v}_\infty = 0$ . Tačke  $\pm 1$  i  $\pm i$  su zaustavne tačke.

### 17.18. Primena principa simetrije, tj. metode lika pri formiranju različitih klasa strujanja.

Princip simetrije se, zajedno sa konformnim preslikavanjem, kako je to pokazano u Odeljcima 16. i 17., obilato i uspešno koristi pri proučavanju raznovrsnih strujanja. U ovom problemu potrebno je primenom metode lika formirati strujanja na osnovu zadatih singulariteta, pri čemu je u beskonačnosti i u ugaonim tačkama (temenima uglova pri strujanju u uglovima) brzina jednaka nuli.

1. Definisati strujanje u prvom kvadrantu  $\operatorname{Re} z > 0$ ,  $\operatorname{Im} z > 0$  u polju izvora  $(1; \dot{V})$ .
2. Odrediti strujno polje u oblasti  $|z| > 1$ ,  $\operatorname{Im} z > 0$  sa vrtlogom  $(ia; \Gamma)$ , gde je  $a > 0$ .
3. Formirati kompleksni potencijal za strujanje u uglu  $0 < \arg z < \pi/3$  za slučaj izvora  $(ae^{i\pi/6}; \dot{V})$ , pri  $a > 0$ .
4. Odrediti strujanje u prvom kvadrantu  $\operatorname{Re} z > 0$ ,  $\operatorname{Im} z > 0$  za slučaj: a) izvora  $(1; \dot{V})$  i ponora  $(i; -\dot{V})$ ; b) izvora  $(1+i; \dot{V})$  i ponora  $(0; -\dot{V})$ .

#### Rešenje:

Primenom izvedenih teorema o pravoj i kružnici (v. izraze (17.8) i (17.14) dobijaju se sledeća rešenja:

$$1. w(z) = (\dot{V}/2\pi) \ln(z^2 - 1) + C, \text{ gde je } C \text{ konstanta.}$$

$$2. w(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln \frac{(z - ia)(az + i)}{(z + ia)(az - i)} + C.$$

$$3. w(z) = \frac{\dot{V}}{2\pi} \ln(z^6 + a^6) + C.$$

$$4. a) w(z) = \frac{\dot{V}}{2\pi} \ln \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} + C.$$

$$b) w(z) = \frac{\dot{V}}{2\pi} \ln \left( 1 + \frac{4}{z^4} \right) + C.$$

### 17.19. Metoda lika i konformno preslikavanje.

U jednostruko povezanoj oblasti  $D$  ograničenoj konturom  $L$  odrediti strujanje u polju vrtložnih vlakana združenih sa izvorima  $\{(a_k; \dot{V}_k, \Gamma_k)\}$ ,  $k = 1, 2, \dots, n$ , pri čemu čvrsta nepropusna kontura  $L$  predstavlja strujnicu. Da li je takvo strujanje uvek moguće?

*Rešenje:*

Neka funkcija  $Z = f(z)$  konformno preslikava domen  $D$  u domen jediničnog kruga  $|Z| < 1$ . Tada je  $w = W[f(z)]$ , gde su

$$W(Z) = \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\Gamma_k + i \dot{V}_k}{2\pi i} \ln(Z - Z_k) + \frac{-\Gamma_k + i \dot{V}_k}{2\pi i} \ln(1 - \bar{Z}_k Z) \right] + C,$$

i  $Z_k = f(a_k)$ , pri nepromenjenom uslovu  $\sum_{k=1}^n \dot{V}_k = 0$ .

### 17.20. Preslikavanje kružnice Loranovim redom u aeroprofil.

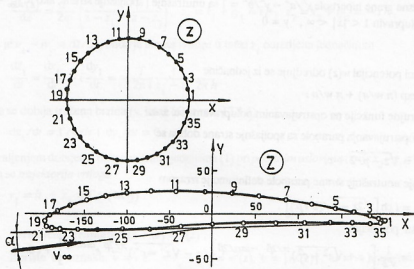
Kružnica jediničnog radijusa  $r_0 = 1$  u ravni kompleksne promenljive  $z = x + iy$  preslikava se u izvesnu konturu u ravni  $Z = X + iY$  pomoću Loranovog reda

$$Z = az + a_1/z + a_2/z^2 + \dots \quad (1)$$

Nacrtati konturu profila u koju se preslikava kružnica  $r_0 = 1$ , ako se u beskonačnom redu (1) zadrže samo tri prva člana sa koeficijentima  $a = 109,25 + 2,65i$ ;  $a_1 = 90,32 - 2,65i$  i  $a_2 = 4,34 - 7,75i$ . Proračun obaviti birajući tačke na kružnici na svakih  $10^\circ$ .

*Rešenje:*

Kontura krila, tj. traženog profila prikazana je na slici 17.20. Odgovarajuće, korespondentne tačke obeležene su na kružnici i profilu.



Slika 17.20