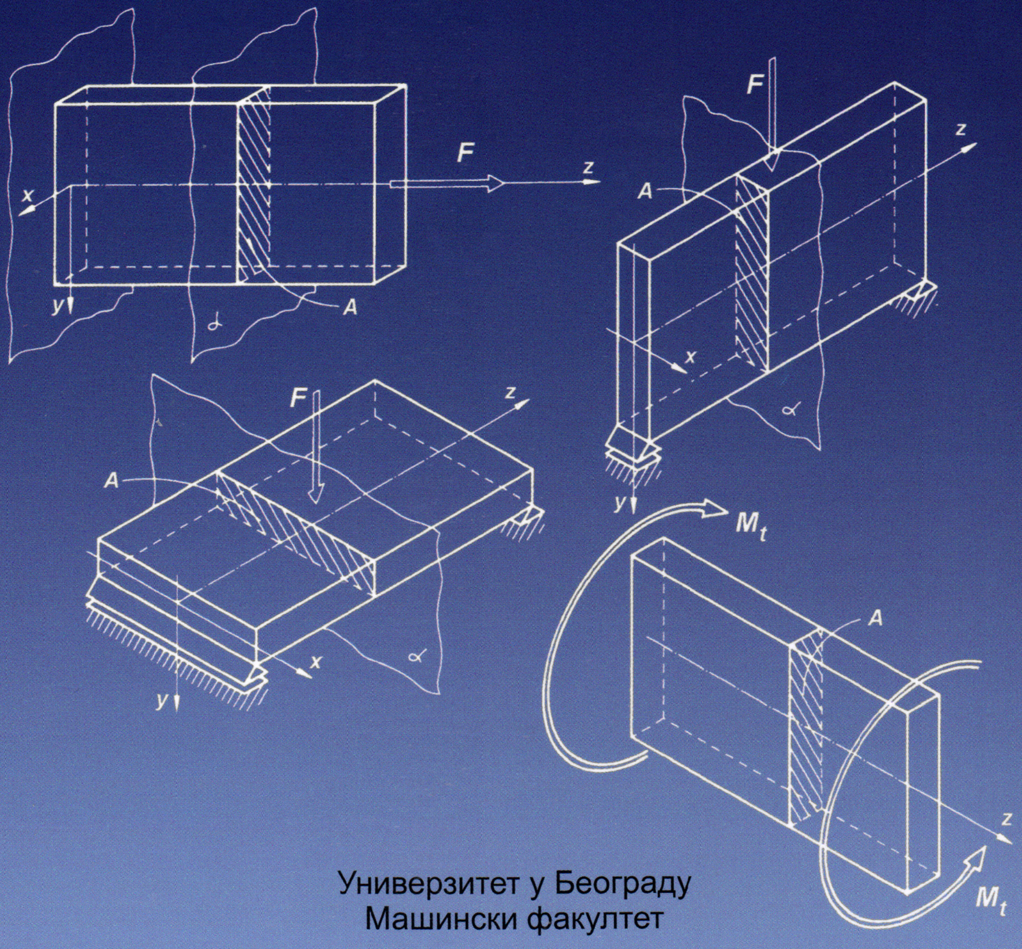
Милорад Милованчевић

Нина Анђелић

Отпорност материјала



Универзитет у Београду
Машински факултет

УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ

Милорад Милованчевић Нина Анђелић

ОТПОРНОСТ МАТЕРИЈАЛА

Машински факултет
Београд, 2006.

др Нина Анђелић, дипл. инж. маш.
доцент Машинског факултета Универзитета у Београду
др Милорад Милованчевић, дипл. инж. маш.
редовни професор Машинског факултета Универзитета у Београду

ОТПОРНОСТ МАТЕРИЈАЛА
треће издање

Рецензенти:
др Весна Милошевић Митић, дипл. инж. маш.
ванредни професор Машинског факултета Универзитета у Београду
др Ташко Манески, дипл. инж. маш.
редовни професор Машинског факултета Универзитета у Београду
др Доброслав Ружић, дипл. инж. маш.
редовни професор Машинског факултета Универзитета у Београду у пензији

Издавач:
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ
ул. Краљице Марије 16, 11020 Београд
тел: 011 3370 760
факс: 011 3370 364

За издавача:
Проф. др Милорад Милованчевић, декан

Главни и одговорни уредник:
Доц. др Владимир Буљак

Одобрено за штампу одлуком Декана Машинског факултета у Београду, бр. 12/2015 од 15.09.2015.

Тираж:
1000 примерака

Штампа:
ПЛАНЕТА ПРИНТ, Београд

ISBN 978-86-7083-872-7

С А Д Р Ж А Ј

СПИСАК УПОТРЕБЉЕНИХ ОЗНАКА VII

УВОД 1

1. ОДНОС СИЛЕ И ДЕФОРМАЦИЈЕ 9

1.1 Појам деформације 9

1.1.1 Линијска, дужинска деформација (дилатација ε) 9

1.1.2 Угаона деформација (угао клизања, клизање γ) 10

1.1.3 Стање деформације 12

1.2 Физичке особине материјала 13

1.3 Облик тела 15

2. ГЕОМЕТРИЈСКЕ КАРАКТЕРИСТИКЕ ПОПРЕЧНИХ ПРЕСЕКА 19

2.1 Општи израз за геометријске карактеристике попречних пресека 26

2.2 Промена момената инерције при трансформацији координатног система 31

2.2.1 Транслација координатног система 31

2.2.2 Ротација координатног система 34

2.3 Главни тежишни моменти инерције 36

2.3.1 Полупречници инерције 39

2.3.2 Елипса инерције 39

2.3.3 Отпорни момент 40

3. ВРСТЕ СИЛА ... 47

3.1 Спољашње силе ... 47

3.1.1 Подела сила према начину њихове промене током времена ... 48

3.2 Унутрашње силе ... 49

3.3 Метод пресека ... 50

3.4 Појам напона ... 51

3.5 Неке основне претпоставке отпорности материјала ... 54

3.6 Веза напона и деформације ... 56

3.7 Поасонов коефицијент ν ... 58

3.8 Запреминска – кубна дилатација ε_V ... 59

3.9 Дозвољени напон ... 61

3.10 Коефицијент сигурности ... 62

3.11 Општи случај напрезања штапа – греде ... 64

3.11.1 Пресече силе – силе у попречном пресеку штапа – греде ... 64

3.11.2 Пресечне силе изражене преко напона ... 66

3.11.3 Основни случајеви напрезања ... 67

4. НАПРЕЗАЊЕ У ПОДУЖНОМ ПРАВЦУ (АКСИЈАЛНО НАПРЕЗАЊЕ) ... 69

4.1 Пресечне силе ... 70

4.2 Услови равнотеже ... 71

4.3 Сен-Венанов принцип ... 74

4.3.1 Појам концентрације напона ... 76

4.4 Димензионисање подужно напрегнутих штапова 78

4.5 Утицај температурских разлика 79

4.6 Утицај сопствене тежине 81

4.7 Утицај центрифугалне силе 83

4.8 Појам статичке неодређености 86

4.8.1 Статички неодређена конструкција изложена подужном напрезању 87

4.8.2 Штапови оптерећени променама температуре 92

4.9 План померања 94

4.10 Подужна преднапрезања 104

5. НАПОНИ У КОСОМ ПРЕСЕКУ ПОДУЖНО НАПРЕГНУТОГ ШТАПА 113

5.1 Равно стање напона 116

5.1.1 Напрезање у два правца 117

5.1.1.1 Главни нормални напони и равни главних напона 118

5.1.1.2 Највећи напон смицања и раван највећег напона смицања 119

5.1.2 Чисто смицање 122

5.1.3 Техничко смицање 127

5.1.3.1 Заковане везе 127

5.1.3.2 Заварене везе 130

6. УВИЈАЊЕ (ТОРЗИЈА) 133

6.1 Увијање (торзија) штапова кружног попречног пресека 135

6.2 Једначине равнотеже 138

6.3 Веза између угла увијања и угла клизања 139

6.4 Релативни угао увијања $\theta'(z)$ 140

6.5 Угао увијања $\theta(z)$ 141

6.6 Напон смицања τ_z 142

6.7 Димензионисање вратила 144

6.7.1 Димензионисање према дозвољеном напону смицања (τ_d) 144

6.7.2 Димензионисање према дозвољеном релативном углу увијања (θ'_d) 145

6.8 Уштеда у материјалу коришћењем вратила кружно - прстенастог попречног пресека 146

6.9 Статички неодређене конструкције изложене увијању 148

7. САВИЈАЊЕ - НАПОНИ 155

7.1 Чисто савијање (око осе x) 158

7.2 Савијање силама (око осе x) 164

7.2.1 Нормални напони при савијању силама 165

7.2.2 Напони смицања при савијању силама 166

7.2.3 Расподела напона смицања τ_{zy} по висини попречног пресека 171

7.2.3.1 Расподела напона смицања по висини правоугаоног попречног пресека 172

7.2.3.2 Расподела напона смицања код неких симетричних попречних пресека 174

7.3 Димензионисање носача на основу дозвољеног напона на савијање 177

7.4 Локални напони 180

7.5 Степен искоришћења попречног пресека 180

7.6 Идеални облик носача изложених савијању 186

7.7 Ојачавање носача помоћу ламела 189

8. ДЕФОРМАЦИЈЕ ПРИ САВИЈАЊУ 193

8.1 Гранични услови за просту греду и конзолу 198

8.2 Клепшов поступак 209

8.3 Статички одређени непрекидни носачи са зглобовима 211

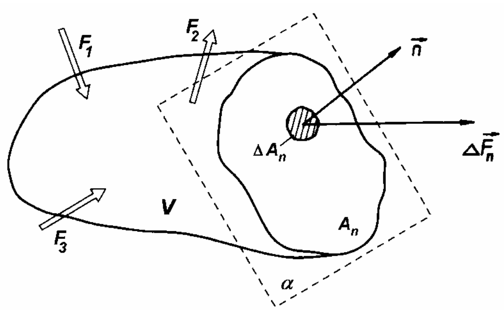
ЛИТЕРАТУРА 225

3.4 ПОЈАМ НАПОНА

Потребно је увести неку бројну меру везану за унутрашње силе (напрезања) у конструкцији (телу).

Када замисливши пресечемо тело неком произвољном равни на леви и десни део тела у односу на ту раван, распоред уочених унутрашњих сила у том пресеку није познат. Из услова равнотеже који могу да се примене за леви или десни део тела, следи да се све те унутрашње силе у самом пресеку могу редуковати на неку силу $\Delta\overrightarrow{F_n}$. Она је по величини једнака резултанти спољашњих сила које нападају уочени (леви или десни) део тела, колинеарна је са њом, а супротног смера, па се обе узајамно поништавају.

Посматрајмо један произвољни попречни пресек напрегнутог елемента. Уколико посматрамо површину целог замишљеног попречног пресека, јасно је да је распоред свих унутрашњих сила по њему, функција координата тачака тог пресека.



Слика 3.4 Појам напона

где су:

- $\vec{n}$ – орт нормале произвољне пресечне равни,
- A_n – површина пресека добијена пресецањем тела произвољном равни,
- ΔA_n – произвољно мала површина у околини произвољне тачке пресека,
- $\Delta\overrightarrow{F_n}$ – средња вредност унутрашње силе по површини ΔA_n.

Изразом

$$\frac{\Delta\overrightarrow{F_n}}{\Delta A_n} = \vec{p}_{n\,средње} \tag{3.1}$$

дефинишемо **средњи напон** (средње напрезање), а када потражимо граничну вредност овог количника, добићемо израз

$$\lim_{\Delta A_n \to 0} \frac{\Delta \overrightarrow{F_n}}{\Delta A_n} = \frac{d\overrightarrow{F_n}}{dA_n} = \vec{p}_n \qquad (3.2)$$

којим дефинишемо **укупни напон**.

Сила у посматраној тачки дефинише се изразом

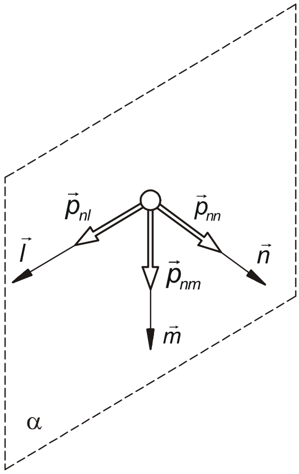
$$d\overrightarrow{F_n} = \overrightarrow{p_n}\, dA_n \qquad (3.3)$$

где је $\vec{p}_n$ **вектор укупног напона** у посматраној тачки попречног пресека дефинисаног нормалом $\vec{n}$. Ова величина се у општем случају разликује и по величини и по правцу од тачке до тачке попречног пресека, што значи да је **напон** појам везан за тачку и за одређену раван кроз ту тачку:

$$\overrightarrow{p_n} = \overrightarrow{p_n}(x, y, z) \qquad (3.4)$$

Како је кроз сваку тачку могуће провући бесконачно много равни, то значи да у свакој тачки постоји бесконачно вектора напона. То такође значи, да вектор укупног напона $\vec{p}_n$ у некој тачки зависи и од оријентације равни постављене кроз ту тачку, која је одређена јединичним вектором спољашње нормале $\vec{n}$ у тој тачки. Скуп свих вектора напона $\vec{p}_n$ за све равни кроз посматрану тачку назива се **стање напона у посматраној тачки**.

Из практичних разлога, вектор напона растављамо на компоненте.



Слика 3.5 Компоненте вектора укупног напона $\vec{p}_n$ у посматраној тачки попречног пресека дефинисаног нормалом $\vec{n}$

За правце дефинисане ортовима $\vec{l}, \vec{m}, \vec{n}$, где је $\vec{n}$ орт нормале уочене пресечне равни, биће:

$$\overrightarrow{p_n} = p_{nl} \cdot \vec{l} + p_{nm} \cdot \vec{m} + p_{nn} \cdot \vec{n} = \tau_{nl} \cdot \vec{l} + \tau_{nm} \cdot \vec{m} + \sigma_{nn} \cdot \vec{n} \tag{3.5}$$

Односно, у ортогоналном систему координата x, y, z (са ортовима $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) биће:

$$\overrightarrow{p_z} = p_{zx} \cdot \vec{i} + p_{zy} \cdot \vec{j} + p_{zz} \cdot \vec{k} = \tau_{zx} \cdot \vec{i} + \tau_{zy} \cdot \vec{j} + \sigma_{zz} \cdot \vec{k} \tag{3.6}$$

Величина

$$\overrightarrow{\tau_{zx}} = \overrightarrow{\tau_{zx}}(x,y,z),\ \overrightarrow{\tau_{zy}} = \overrightarrow{\tau_{zy}}(x,y,z) \tag{3.7}$$

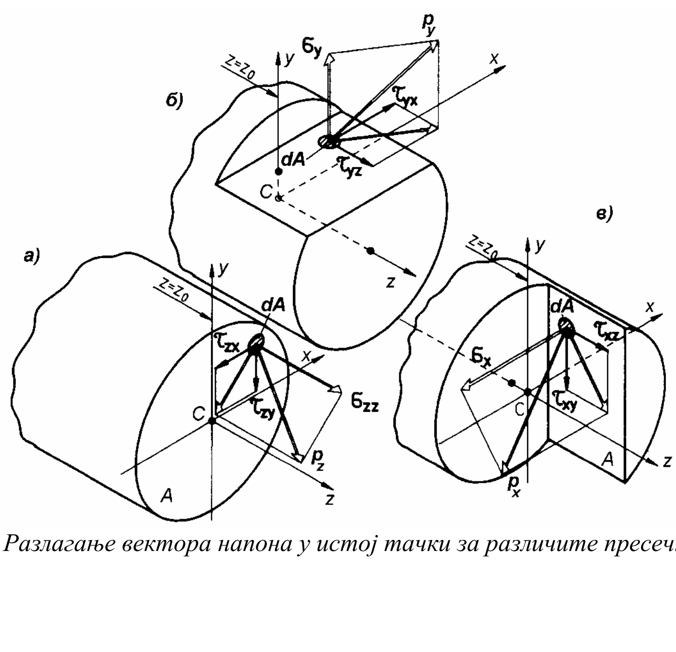
се назива **напон смицања** у некој тачки за раван са нормалом $\vec{z}$ у смеру x, односно y, и делује у равни попречног пресека.

Величина

$$\overrightarrow{\sigma_{zz}} = \overrightarrow{\sigma_{zz}}(x,y,z) \tag{3.8}$$

назива се **нормални напон** у некој тачки за раван са нормалом $\vec{z}$, делује управно на попречни пресек, а уобичајено је да се у отпорности материјала обележава са σ_z.

Дакле, у ортогоналном систему координата x, y, z, биће:



Слика 3.6 Разлагање вектора напона у истој тачки за различите пресечне равни

Један од основних задатака отпорности материјала је одређивање вредности нормалног напона и напона смицања за сваку тачку напрегнутог тела.

Довољно је познавати векторе напона за три међусобно управне равни у некој тачки, па је могуће одредити вектор напона за било коју раван кроз ту тачку.

3.5 НЕКЕ ОСНОВНЕ ПРЕТПОСТАВКЕ ОТПОРНОСТИ МАТЕРИЈАЛА

У Отпорности материјала усвајамо извесне претпоставке о материјалу, деформацијама, силама, условима равнотеже и тако даље, јер, с једне стране, уопштено решавање проблема у области механике деформабилног тела у већини случајева није могуће обавити на једноставан и брз начин, погодан за свакодневну инжењерску праксу. Са друге стране, Отпорност материјала која представља почетну основу у области механике деформабилног тела, својим уводним претпоставкама даје могућност решавања читавог низа проблема који се појављују у инжењерској пракси. Применом уводних претпоставки отпорности материјала добијају се једноставни обрасци погодни за свакодневну инжењерску примену. Оваквим обрасцима се добијају решења проблема која су на страни сигурности, а инжењери их често називају азбуком свог заната.

1. Претпоставка о материјалу

Материјал је:

- непрекидан,
- хомоген и изотропан,
- идеално и то линеарно еластичан.

2. Претпоставка о малим деформацијама

Деформације су мале у поређењу са димензијама тела.
$\varepsilon \sim 0.001$ или $\varepsilon \sim 0.1$ %.

3. Претпоставка о силама

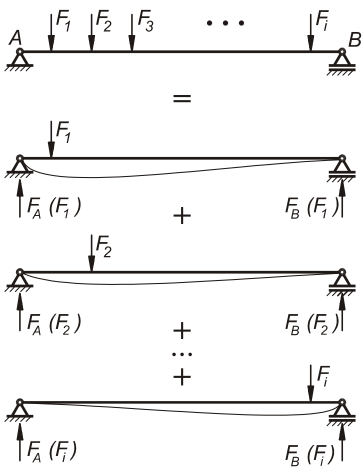
Спољашње силе су статичке.

Конструкција која испуњава услове 1, 2 и 3, може се звати **конструкцијом са линеарним понашањем**, а одговарајући проблеми – **линеарни проблеми**. Код таквих проблема могу се увести још неке претпоставке.

4. Претпоставка о независности дејства сила (принцип суперпозиције)

Примена суперпозиције оптерећења може знатно олакшати решавање читавог низа проблема. Овај принцип се састоји у томе да се замишљено посматра утицај сваког оптерећења посебно („разлагање оптерећења“). Алгебарским сабирањем појединачних утицаја добија се укупан резултат дејства оптерећења.

Пример:



Слика 3.7 Приказ принципа суперпозиције оптерећења

$$F_A = F_A(F_1) + F_A(F_2) + ... + F_A(F_i) = \Sigma\, F_A(F_i),$$

$$F_B = F_B(F_1) + F_B(F_2) + ... + F_B(F_i) = \Sigma\, F_B(F_i).$$

5. Претпоставка о условима равнотеже

Услови равнотеже исписиваће се увек у односу на облик и димензије конструкције пре деформације.

Напоменимо да су у свим инжењерским анализама крајње неопходни кораци везани и за димензиону анализу, па је згодно подсетити се које се све јединице користе у Отпорности материјала.

- F_z (N) - подужна (аксијална) сила у пресеку z (делује у правцу осе z)
- M_x (M_{fx}) - моменти савијања (флексије) у пресеку z (савијају
  M_y (M_{fy}) посматрани елемент око осе x, односно осе y)
- M_z (M_t) - момент увијања (торзије) – обрће попречни пресек око осе z.

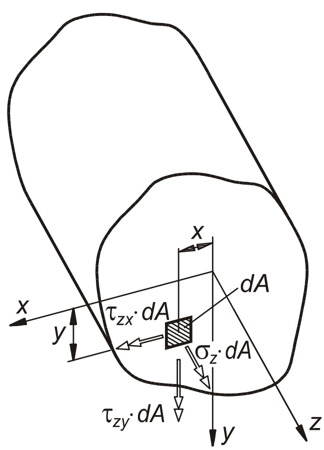
Све горе наведене величине називају се **нападне величине у пресеку *z*.**

Скуп свих пресечних сила (сила и момената) на левој страни пресека замењује утицај уклоњеног десног дела штапа (греде) и обрнуто.

При практичном одређивању пресечних сила треба знати да се свака од нападних величина у пресеку z може добити као алгебарски збир пројекција свих спољашњих сила, односно њихових момената који делују на леви или десни део штапа (греде) на главне тежишне осе (x, y, z).

3.11.2 Пресечне силе изражене преко напона

Услови равнотеже у попречном пресеку



Слика 3.15 Пресечне силе изражене преко напона

Нападне величине се могу израчунати из услова равнотеже посматраног елемента у односу на изабрани координатни систем (Сл. 3.15):

1. $\int_A \tau_{zx} dA = T_x$

2. $\int_A \tau_{zy} dA = T_y$

3. $\int_A \sigma_z dA = N$

4. $\int_A y \cdot \sigma_z dA = M_x$

5. $-\int_A x \cdot \sigma_z dA = M_y$

6. $\int_A \left(x \cdot \tau_{zy} - y \cdot \tau_{zx}\right) dA = M_t \qquad (3.14)$

Истакнимо да у горњим једначинама десну страну израза знамо, а леву не. Дакле, можемо да закључимо да се јавља проблем како да одредимо леви део ових израза, односно, како да одредимо распоред напона по попречном пресеку. Сен–Венан је први предложио поступак за решавање овог проблема, поступак који је касније и назван Сен–Венанова полуобртна метода, а која се базира на:

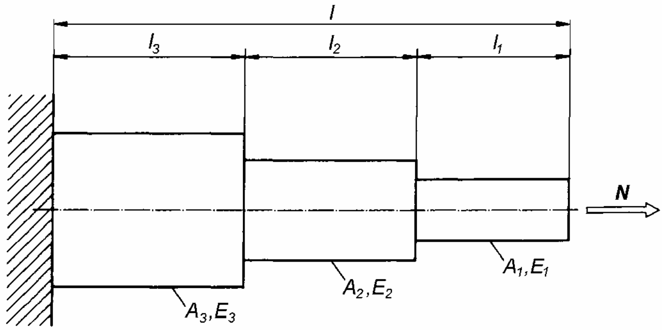
- претпоставци о напонима,
- претпоставци о деформацијама и
- вези напона и деформације (Хуков закон).

3.11.3 Основни случајеви напрезања

На основу претпоставке о независности дејства сила, општи случај напрезања можемо посматрати као збир појединачних основних случајева:

- подужно напрезање,
- увијање,
- савијање.

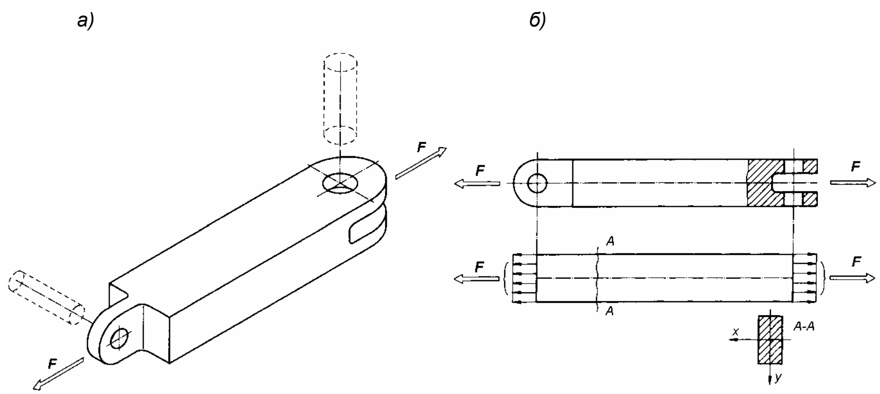
У даљим разматрањима посветићемо одговарајућу пажњу свим наведеним основним случајевима напрезања.



Слика 4.3 Штап променљивог попречног пресека укупне дужине распона $l = l_1 + l_2 + l_3$

4.3 СЕН-ВЕНАНОВ* ПРИНЦИП

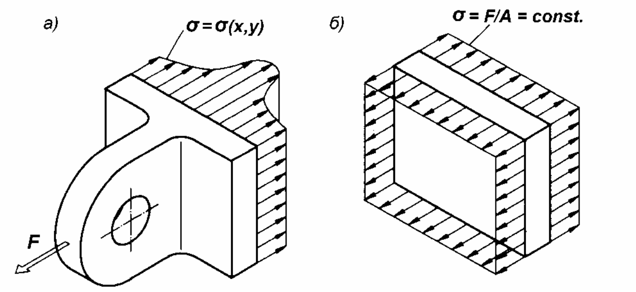
Изведени образац за σ_z важи само за попречне пресеке довољно удаљене од места деловања концентрисане силе. Погледајмо изглед неког реалног конструктивног елемента (Сл. 4.4а) који је оптерећен подужном силом.



Слика 4.4 а) Стварни носећи елемент оптерећен затежућом силом
б) Стварни носећи елемент сведен на модел за прорачун

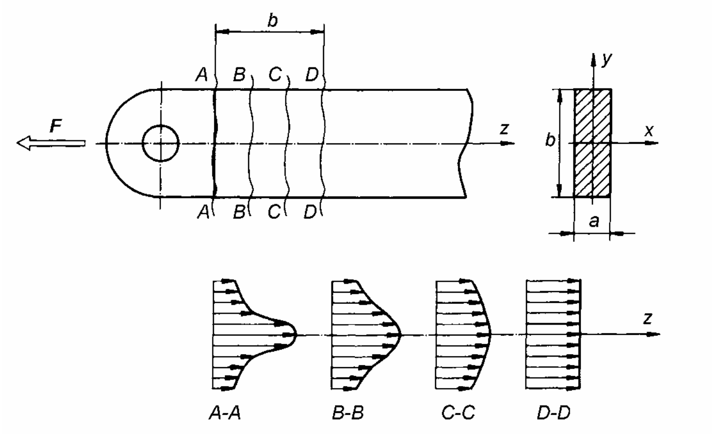
Уочимо зону штапа (Сл. 4.5а) блиску околини тачке уноса оптерећења. Експериментима је установљено да је у попречним пресецима у тој зони расподела напона неравномерна.

* Adhemar Jean Barre de Saint-Venant (1797-1886), француски научник који је поред осталог дао велики допринос развоју теорије еластичности.



Слика 4.5 Расподела нормалних напона у околини тачке везивања

Ако је тело оптерећено статички еквивалентним системима сила (једнаких главних вектора и главних момената), а димензије области деловања силе су мале у поређењу са димензијама тела, онда ће у пресецима довољно удаљеним од места деловања силе (Сл. 4.4б и Сл. 4.5б), расподела напона веома мало зависити од начина уношења силе.Оваква разматрања су позната као **Сен - Венанов принцип**: при удаљавању од тачке деловања силе, неравномерна расподела напона постепено тежи равномерној расподели (Сл. 4.6).



Слика 4.6 Сен–Венанов принцип

Према већини аутора, сматра се да напон по попречном пресеку постаје равномерно расподељен на удаљењу *b* од тачке уноса силе (Сл 4.6), а постоје и подаци у литератури [7] који говоре о удаљењима (1,5 – 2) *b*. Не постоји никакав општи теоријски доказ Сен – Венановог принципа, али је он потврђен многобројним експериментима.