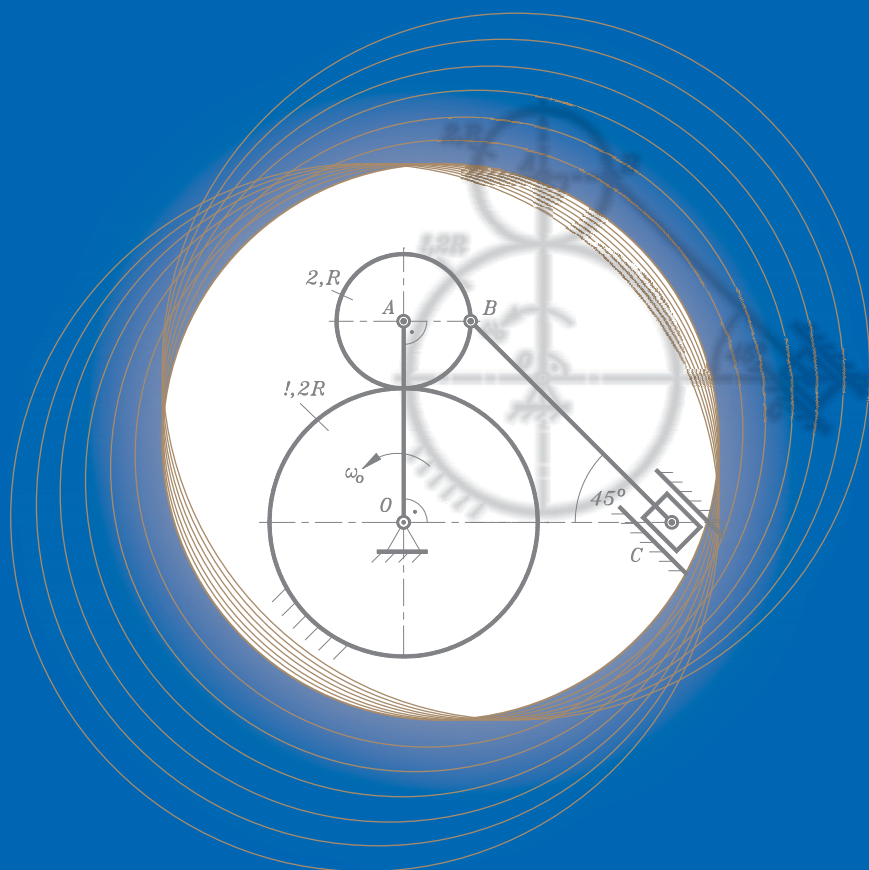




Milivoje Simonović  
Zoran Mitrović  
Zoran Golubović

# MEHANIKA

## KINEMATIKA



Milivoje Simonović Zoran Mitrović Zoran Golubović

***MEHANIKA***  
***KINEMATIKA***

II izdanje

Beograd, 2015.

*Autori:*

*Prof. dr Milivoje Simonović*, Mašinski fakultet, Beograd

*Prof. dr Zoran Mitrović*, Mašinski fakultet, Beograd

*Prof. dr Zoran Golubović*, Mašinski fakultet, Beograd

## **MEHANIKA**

### **Kinematika**

Drugo izdanje

---

*Recenzenti:*

*Prof. dr Vukman Čović*, Mašinski fakultet, Beograd

*Prof. dr Predrag Cvetković*, Saobraćajni fakultet, Beograd

Izdavač:

Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu

11120 Beograd, Kraljice Marije 16,

telefon – 011 3370 350 i 3302 384, fax: 011 3370 364

Za izdavača: Dekan, *prof. dr Milorad Milovančević*

Glavni i odgovorni urednik: *prof. dr Aleksandar Obradović*

Odobreno za štampu odlukom Dekana Mašinskog fakulteta u Beogradu br. 2/15 od 05.02.2015. godine

Štampa:

**PLANETA PRINT**

11000 Beograd

Tiraž: 500 primeraka

---

© Autori i Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu.  
Zabranjeno preštampavanje i umnožavanje. Sva prava zadržavaju izdavač i autori.

## P R E D G O V O R

Ovaj univerzitetski udžbenik nastao je na osnovu predavanja i vežbi koje su autori držali na Mašinskom fakultetu u Beogradu.

Iskustva iz rada sa studentima ukazuju na to da su ovakvi udžbenici, kod kojih je izložena teorija ilustrovana velikim brojem odgovarajućih zadataka, rado prihvaćeni.

Osim navedene literature pri pisanju su korišćena i predavanja i pisani materijali pok. *prof. dr* Dragovana Blagojevića, profesora Mašinskog fakulteta u Beogradu.

Značajnu podršku i sugestije za konačno oblikovanje ovog udžbenika dali su recenzenti *prof. dr* Vukman Čović i *prof. dr* Predrag Cvetković, na čemu im se najsrdačnije zahvaljujemo. Takođe, zahvaljujemo se *doc. dr* Milanki Glišić na pažljivom pregledu teksta. Posebnu zahvalnost dugujemo Jovanki Cvetković, *prof.*, koja je izvršila korekturu teksta kao i Miši Maksimoviću koji je zaslužan za grafičku obradu.

*Autori*

# S A D R Ž A J

1. Uvodna razmatranja .....	1
1.1. Osnovni pojmovi.....	1
1.2. Značaj proučavanja kinematike .....	3
1.3. Osnovni zadaci kinematike .....	3
2. Kinematika tačke .....	4
2.1. Načini određivanja kretanja tačke.....	4
2.1.1. Vektorski način određivanja kretanja tačke .....	4
2.1.2. Analitički (koordinatni) način određivanja kretanja tačke.....	5
2.1.2.a. Dekartove koordinate .....	6
2.1.2.b. Polarno-cilindarske koordinate. Polarne koordinate .....	8
2.1.2.c. Sferne koordinate .....	10
2.1.3. Prirodni način određivanja kretanja tačke.....	12
2.1.4. Veze između različitih načina određivanja kretanja tačke.....	14
2.2. Brzina tačke .....	17
2.2.1. Vektorski način određivanja brzine tačke .....	17
2.2.2. Analitički (koordinatni) način određivanja brzine tačke.....	18
2.2.2.a. Određivanje brzine tačke u Dekartovim koordinatama.....	18
2.2.2.b. Određivanje brzine tačke u polarno-cilindarskim koordinatama .....	19
2.2.2.c. Određivanje brzine tačke u sfernim koordinatama.....	21
2.2.2.d. Prirodni način određivanja brzine tačke.....	23
2.2.3. Sektorska brzina tačke .....	25
2.2.4. Hodograf brzine tačke.....	27
2.3. Ubrzanje tačke .....	28
2.3.1. Vektorski način određivanja ubrzanja tačke .....	28
2.3.2. Analitički (koordinatni) način određivanja ubrzanja tačke .....	30
2.3.2.a. Određivanje ubrzanja tačke u Dekartovim koordinatama .....	30
2.3.2.b. Određivanje ubrzanja tačke u polarno-cilindarskim koordinatama .....	31
2.3.2.c. Određivanje ubrzanja tačke u sfernim koordinatama.....	32
2.3.3. Prirodni način određivanja ubrzanja tačke.....	33

2.3.3.1. Prirodni trijedar u tački prostorne krive .....	33
2.3.3.2. Vektor krivine krive .....	34
2.3.3.3. Tangencijalno i normalno ubrzanje tačke .....	37
2.3.3.4. Određivanje poluprečnika krivine putanje tačke.....	38
2.3.4. Klasifikacija kretanja tačke prema njenom ubrzanju .....	39
2.3.4.1. Pravolinijsko kretanje tačke .....	39
2.3.4.2. Krivolinijsko kretanje tačke .....	40
2.3.4.3. Oscilatorno kretanje tačke.....	43
2.4. Trzaj (Puls) .....	45
2.5. Brzina i ubrzanje tačke u generalisanim (krivolinijskim) koordinatama .	45
Zadaci .....	53
3. Kinematika tela .....	81
3.1. Osnovni pojmovi kinematike tela .....	81
3.2. Translatorno kretanje tela .....	82
3.2.1. Određivanje kretanja i karakteristika kretanja pojedinih tačaka tela koje vrši translatorno kretanje.....	83
3.3. Obrtanje tela oko nepokretne ose.....	85
3.3.1. Ugaona brzina tela koje se obrće oko nepokretne ose. ....	86
3.3.2. Brzina tačke tela koje se obrće oko nepokretne ose.....	88
3.3.3. Ugaono ubrzanje tela koje se obrće oko nepokretne ose .....	89
3.3.4. Ubrzanje tačke tela koje se obrće oko nepokretne ose.....	91
3.3.5. Posebni slučajevi obrtanja tela oko nepokretne ose.....	93
3.4. Ravno kretanje tela .....	94
3.4.1. Razlaganje ravnog kretanja na translatorno i obrtno.....	95
3.4.2. Jednačine kretanja ravne figure.....	96
3.4.3. Određivanje kretanja proizvoljne tačke ravne figure .....	96
3.4.4. Određivanje brzine tačke tela pri ravnom kretanju razlaganjem kretanja .....	97
3.4.4.1. Nezavisnost vektora ugaone brzine i ugaonog ubrzanja tela koje vrši ravno kretanje od izbora pola translacije .....	98
3.4.4.2. Teorema o projekcijama vektora brzina tačaka ravne figure .....	99
3.4.5. Trenutni pol brzina ravne figure .....	101
3.4.5.1. Određivanje brzina tačaka ravne figure pomoću trenutnog pola brzina .....	102
3.4.5.2. Različiti slučajevi određivanja položaja trenutnog pola brzina ravne figure .....	103
3.4.6. Određivanje ubrzanja tačke tela pri ravnom kretanju .....	105
3.4.7. Trenutni pol ubrzanja ravne figure.....	107
3.4.7.1. Određivanje ubrzanja tačaka ravne figure pomoću	

trenutnog pola ubrzanja.....	108
3.4.7.2. Različiti slučajevi određivanja položaja trenutnog pola ubrzanja ravne figure.....	109
3.4.8. Različiti slučajevi određivanja ugaonog ubrzanja ravne figure.....	112
3.4.9. Centroide.....	114
3.4.9.1. Bernuli - Šalova teorema.....	115
3.4.9.2. Trenutni centar obrtanja. Centroide .....	116
3.4.9.3. Poansoova teorema .....	116
3.4.9.4. Jednačina nepokretne i pokretne centroide .....	118
3.5. Sferno kretanje tela (Obrtanje tela oko nepokretne tačke).....	120
3.5.1. Ojler - Dalamberova teorema.....	122
3.5.2. Brzina tačke tela pri sfernom kretanju. Vektor trenutne ugaone brzine. Jednačina trenutne ose obrtanja.....	123
3.5.3. Ojlerove kinematičke jednačine .....	127
3.5.4. Trenutno ugaono ubrzanje tela koje vrši sferno kretanje .....	130
3.5.5. Projekcije vektora trenutnog ugaonog ubrzanja tela koje vrši sferno kretanje na ose pokretnog i nepokretnog Dekartovog koordinatnog sistema .....	131
3.5.6. Projekcije brzine tačke tela koje vrši sferno kretanje na ose pokretnog i nepokretnog Dekartovog koordinatnog sistema .....	133
3.5.7. Aksoidi. Jednačina pokretnog i nepokretnog aksoida.....	135
3.5.8. Ubrzanje tačke tela koje vrši sferno kretanje .....	136
3.5.9. Projekcije ubrzanja tačke tela koje vrši sferno kretanje na ose pokretnog i nepokretnog Dekartovog koordinatnog sistema .....	138
3.6. Opšte kretanje tela.....	140
3.6.1. Jednačine opšteg kretanja slobodnog tela .....	140
3.6.2. Brzina tačke tela koje vrši opšte kretanje.....	141
3.6.2.1. Nezavisnost vektora trenutne ugaone brzine i trenutnog ugaonog ubrzanja tela koje vrši opšte kretanje od izbora pola translacije .....	142
3.6.3. Ubrzanje tačke tela koje vrši opšte kretanje.....	143
Zadaci .....	144
4. Složeno kretanje tačke .....	185
4.1. Relativno, prenosno i apsolutno kretanje tačke .....	185
4.2. Brzina tačke pri složenom kretanju (apsolutna brzina tačke) .....	186
4.3. Ubrzanje tačke pri složenom kretanju (apsolutno ubrzanje tačke) .....	189

Zadaci .....	191
5. Složeno kretanje tela .....	218
5.1. Relativno, prenosno i apsolutno kretanje tela .....	218
5.2. Slaganje translatornih kretanja tela .....	219
5.3. Slaganje obrtanja tela oko osa koje se seku .....	220
5.4. Slaganje obrtanja tela oko paralelnih osa.....	222
5.4.1. Obrtanje tela oko paralelnih osa ugaonim brzinama istog smera .....	222
5.4.2. Obrtanje tela oko paralelnih osa ugaonim brzinama suprotnog smera .....	225
5.4.3. Kinematički spreg .....	226
5.5. Slaganje translatornog i obrtnog kretanja tela.....	227
5.5.1. Brzina translatornog kretanja upravna je na osu obrtanja.....	227
5.5.2. Brzina translatornog kretanja kolinearna je sa osom obrtanja.....	229
5.5.3. Brzina translatornog kretanja gradi proizvoljan ugao sa osom obrtanja.....	230
Zadaci .....	231
6. Elementi teorije mehanizama.....	237
6.1. Osnovni pojmovi.....	237
6.2. Zglavkasti četvorougao.....	239
6.3. Klipni mehanizam.....	240
6.4. Kulisni mehanizami .....	242
6.5. Prenosni mehanizmi (prenosnici kretanja).....	244
Literatura.....	249