

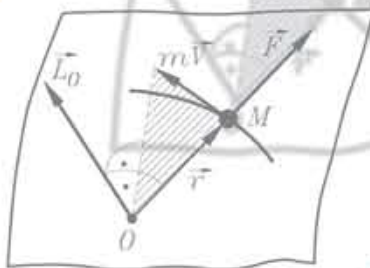
UNIVERZITET U BEOGRADU  
MAŠINSKI FAKULTET



Zoran Mitrović  
Zoran Golubović  
Milivoje Simonović

# MEHANIKA

## DINAMIKA TAČKE



Zoran Mitrović Zoran Golubović Milivoje Simonović

***MEHANIKA***  
***DINAMIKA TAČKE***

Beograd, 2011.

*Autori:*

*Prof. dr Zoran Mitrović*, Mašinski fakultet, Beograd

*Prof. dr Zoran Golubović*, Mašinski fakultet, Beograd

*Prof. dr Milivoje Simonović*, Mašinski fakultet, Beograd

## **MEHANIKA**

### **Dinamika tačke**

Prvo izdanje

---

*Recenzenti:*

*Prof. dr Nikola Mladenović*, Mašinski fakultet, Beograd

*Prof. dr Dragoslav Kuzmanović*, Saobraćajni fakultet, Beograd

Izdavač:

Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu

11120 Beograd, Kraljuce Marije 16,

telefon – 011 3370 350 i 3302 384, telefax: 011 3370 364

Za izdavača: Dekan, *prof. dr Milorad Milovančević*

Glavni i odgovorni urednik: *prof. dr Aleksandar Obradović*

Odobreno za štampu odlukom Dekana Mašinskog fakulteta u Beogradu br. od 1.1.2011.godine

Štampa:

**PLANETA PRINT**

11000 Beograd, Ruzveltova 10, tel.: 011 3088129

Tiraž: 500 primeraka

---

© Autori i Mašinski fakultet Univerziteta u Beogradu.  
Zabranjeno preštampavanje i umnožavanje. Sva prava  
zadržavaju izdavač i autori.

## P R E D G O V O R

Udžbenik **MEHANIKA - Dinamika tačke** nastao je od materijala koji su autori koristili za predavanja i vežbe na Mašinskom fakultetu u Beogradu.

Koncepcija udžbenika nastala je na osnovu zapažanja da su udžbenici sa zadacima, posebno ispitnim, koji ilustruju izloženu teoriju, veoma dobro prihvaćeni od strane njihovih korisnika. To potvrđuju i ranije publikovani udžbenici iz ove oblasti.

Zadaci koji su našli mesto u ovom udžbeniku raspoređeni su metodski po pojedinim tematskim celinama. Mnogi zadaci su bili na ispitima iz Mehanike na Mašinskom fakultetu u Beogradu i delo su nastavnika i saradnika Katedre za mehaniku.

Osim navedene literature korišćena su predavanja i pisani materijali pok. prof. dr Dragovana Blagojevića, profesora Mašinskog fakulteta u Beogradu.

Značajnu podršku i korisne sugestije pri pisanju ovog udžbenika dali su recenzenti prof. dr Nikola Mladenović i prof. dr Dragoslav Kuzmanović. Zahvaljujemo se lektoru Jovanki Cvetković, prof., koja je izvršila korekturu teksta kao i Miši Maksimoviću koji je zaslužan za grafičku obradu.

*Autori*

# S A D R Ź A J

1. Uvodna razmatranja .....	1
1.1. Uvod.....	1
1.2. Osnovni zakoni dinamike.....	3
1.3. Osnovne fizičke veličine. Dimenzije fizičkih veličina. Merne jedinice .....	6
2. Diferencijalne jednačine kretanja i osnovni zadaci dinamike slobodne tačke.....	8
2.1. Diferencijalne jednačine kretanja slobodne tačke .....	8
2.1.1. Diferencijalne jednačine kretanja tačke u Dekartovim koordinatama.....	9
2.1.2. Diferencijalne jednačine kretanja tačke u polarno-cilindarskim i polarnim koordinatama.....	10
2.1.3. Ojlerove (prirodne) diferencijalne jednačine kretanja tačke .....	10
2.2. Dva osnovna zadatka dinamike tačke .....	11
2.3. Pravolinijsko kretanje tačke .....	15
2.3.1. Pravolinijsko kretanje tačke pod dejstvom konstantne sile.....	16
2.3.2. Pravolinijsko kretanje tačke pod dejstvom sile koja je funkcija vremena .....	20
2.3.3. Pravolinijsko kretanje tačke pod dejstvom sile koja je funkcija položaja tačke.....	21
2.3.4. Pravolinijsko kretanje tačke pod dejstvom sile koja je funkcija brzine tačke .....	26
2.4. Krivolinijsko kretanje tačke .....	28
2.4.1. Centralna sila.....	34
Zadaci.....	40
3. Kretanje neslobodne tačke .....	56

3.1. Neslobodna tačka.	
Osnovne jednačine kretanja neslobodne tačke.....	56
3.2. Veze. Jednačine veza. Klasifikacija veza.....	57
3.3. Lagranževe jednačine prve vrste.....	60
3.3.1. Kretanje tačke po zadatoj idealnoj nepokretnoj površi.....	60
3.3.2. Kretanje tačke po zadatoj realnoj nepokretnoj površi.....	62
3.3.3. Kretanje tačke po zadatoj idealnoj nepokretnoj krivoj.....	63
3.3.4. Kretanje tačke po zadatoj realnoj nepokretnoj krivoj.....	65
3.4. Ojlerove jednačine kretanja neslobodne tačke.....	66
3.4.1. Kretanje tačke po zadatoj idealnoj nepokretnoj krivoj.....	66
3.4.2. Kretanje tačke po zadatoj realnoj nepokretnoj krivoj.....	67
3.5. Matematičko klatno.....	68
3.6. Dalamberov princip.....	72
Zadaci.....	75
4. Pravolinijske oscilacije tačke.....	86
4.1. Osnovne postavke.....	86
4.2. Slobodne neprigušene oscilacije tačke.....	88
4.3. Slobodne prigušene oscilacije tačke.....	97
4.3.1. Slobodne prigušene oscilacije tačke pri dejstvu viskozno trenja.....	99
4.3.2. Slobodne prigušene oscilacije tačke pri dejstvu suvog trenja.....	108
4.4. Prinudne neprigušene oscilacije tačke.....	114
4.5. Prinudne prigušene oscilacije tačke.....	123
Zadaci.....	127
5. Opšte teoreme i zakoni dinamike tačke.....	142
5.1. Osnovne postavke.....	142
5.2. Teorema o promeni količine kretanja tačke.....	142
5.2.1. Količina kretanja tačke.....	142
5.2.2. Impuls sile.....	143
5.2.3. Teorema o promeni količine kretanja tačke.....	144
5.2.3.1. Zakon o održanju količine kretanja tačke.....	146
5.3. Teorema o promeni kinetičkog momenta tačke u odnosu na nepokretni pol i nepokretnu osu.....	148
5.3.1. Kinetički moment tačke.....	148
5.3.2. Teorema o promeni kinetičkog momenta tačke u odnosu na nepokretni pol i nepokretnu osu.....	150
5.3.2.1. Zakon o održanju kinetičkog momenta tačke	

u odnosu na nepokretni pol i nepokretnu osu.....	151
5.3.3. Teorema o promeni kinetičkog momenta tačke u odnosu na pokretni pol i pokretnu osu .....	153
5.4. Rad i snaga sile .....	155
5.4.1. Elementarni rad sile .....	155
5.4.2. Ukupni rad sile .....	157
5.4.2.1. Rad rezultante sistema sila .....	159
5.4.2.2. Rad konstantne sile .....	159
5.4.3. Izračunavanje radova nekih sila pri njihovom dejstvu na tačku .....	160
5.4.3.1. Rad težine tačke .....	160
5.4.3.2. Rad centralne sile .....	161
5.4.3.2.1. Rad linearne sile elastičnosti .....	162
5.4.3.3. Rad sile trenja klizanja .....	163
5.4.4. Snaga sile .....	164
5.5. Teorema o promeni kinetičke energije tačke .....	166
5.5.1. Kinetička energija tačke.....	166
5.5.2. Teorema o promeni kinetičke energije tačke .....	166
5.5.2.1. Primena teoreme o promeni kinetičke energije tačke u pojedinim slučajevima kretanja tačke.....	167
5.6. Polje sile. Potencijalna energija .....	170
5.6.1. Polje sile. Funkcija sile. Konzervativna sila .....	170
5.6.2. Uslovi konzervativnosti sile.....	171
5.6.3. Potencijalna energija .....	172
5.6.4. Ekvipotencijalne površi.....	174
5.7. Zakon o održanju mehaničke energije tačke .....	176
5.7.1. Disipacija ukupne mehaničke energije tačke .....	176
Zadaci.....	177
6. Kretanje tačke pod dejstvom centralne sile.....	207
6.1. Zakon površine.....	207
6.2. Diferencijalne jednačine kretanja tačke pod dejstvom centralne sile.....	209
6.3. Bineova jednačina .....	210
6.4. Kretanje tačke pod dejstvom Njutnove sile opšte gravitacije .....	211
6.5. Keplerovi zakoni.....	215
6.6. Trajektorije veštačkih Zemljinih satelita.....	217
Zadaci.....	219
7. Dinamika relativnog kretanja tačke .....	234

7.1. Diferencijalne jednačine relativnog kretanja tačke .....	234
7.2. Posebni slučajevi relativnog kretanja neinercijalnog koordinatnog sistema.....	237
7.2.1. Ravno kretanje neinercijalnog koordinatnog sistema .....	237
7.2.2. Obrtanje oko nepokretne ose neinercijalnog koordinatnog sistema.....	237
7.2.3. Translatorno kretanje neinercijalnog koordinatnog sistema .....	238
7.3. Relativna ravnoteža tačke .....	240
7.4. Odstupanje napadne linije težine tačke od pravca poluprečnika Zemlje .....	240
7.5. Skretanje tačke od vertikale pri slobodnom padu .....	242
7.6. Odranjavanje obala reka usled obrtanja Zemlje.....	245
7.7. Teorema o promeni kinetičke energije pri relativnom kretanju tačke .....	246
Zadaci.....	247
8. Dinamika tačke promenljive mase .....	273
8.1. Opšte postavke o kretanju tačke promenljive mase .....	273
8.2. Vektorska diferencijalna jednačina kretanja tačke promenljive mase - jednačina Meščerskog .....	274
8.2.1. Specijalni slučajevi jednačine Meščerskog.....	275
8.3. Zadatak Ciolkovskog .....	276
Zadaci.....	277
Dodatak - O rešavanju nehomogenih linearnih diferencijalnih jednačina drugog reda sa konstantnim koeficijentima .....	294
Literatura.....	299