Dr Branislav Popkonstantinović
Dr Zorana Jeli
Dr Raša Andrejević
Dr Goran Šiniković

# KONSTRUKTIVNA GEOMETRIJA I GRAFIKA

# PRAKTIKUM

Autori:
Dr Branislav Popkonstantinović
Dr Zorana Jeli
Dr Raša Andrejević
Dr Goran Šiniković

**KONSTRUKTIVNA GEOMETRIJA I GRAFIKA**
**PRAKTIKUM**

Recenzenti:
Prof. dr Aleksandar Veg, Mašinski fakultet, Beograd
Prof. dr Aleksandar Čučaković, Građevinski fakultet, Beograd

Izdavač:
Mašinski Fakultete Univerziteta u Beogradu
11120 Beograd, Kraljice Marije 16,
Telefon – 011 3370 350 i 3302 384, telefax: 011 3370 364

Za izdavača: Dekan, prof. dr Radivoj Mitrović

Glavni i odgovorni urednik: doc. Dr Milan Lečić

Odobreno za štampu odlukom dekana Mašinskog fakulteta u Beogradu
Br. 24/2021 od 30.08.2021.

Štampa:
PLANETA PRINT
Beograd

Tiraž: 500 primeraka

ISBN 978-86-6060-088-4

## PREDGOVOR PRVOM IZDANJU

Ovaj praktikum napisan je u skladu sa novim, reformisanim planom i programom predmeta Konstruktivna geometrija Mašinskog fakultetu u Beogradu i namenjen je, uglavnom, studentima mašinskih fakulteta.

Praktikum je podeljen na 6 metodoloških jedinica koje se obrađuju na časovima vežbanja iz Konstruktivne geometrije.Svaka pojedina nastavna jedinica sadrži nekoliko grupa zadataka od kojih je prva (nulta) u potpunosti rešena, a rešenje prikazano slikom i objašnjeno rečima. Rešavanjem i izradom ovih zadataka studenti se upoznaju sa praktičnom primenom postupaka, operacija i metoda Konstruktivne geometrije koji su teorijski obrađeni na časovima predavanja. Studentima se prepoučuje da pažljivo saslušaju sveinstukcije koje saopštavaju predavači i asistenti, da u svesci ili pored samih crteža beleže ta objašnjenja, a zatim da u toku samostalnog rada pročitaju i uputstva odnosno, objašnjenja za izradu zadataka koja se nalaze u ovom praktikumu.Ostale grupe zadataka namenjene su za dalje uvežbavanje gradiva, kao i pripremu kolokvijuma i ispita kroz samostalnirad.Studentima se takođe preporučuje da sve nejasnoće u vezi gradiva i zadataka razjasne odmah na vežbama ili putem konsultacija u kabinetu. Redovno i aktivno pohađanje časova vežbanja je obavezno. Vežbe se ocenjuju poenimaod 0 do 100 i utiču na finalnu ocenu.

Finalna ocena*F* iz predmeta Konstruktivna geometrija formira se u toku celokupnog procesa izvođenja nastave i sačinjavaju je:

1. Ocena vežbi – $V$
2. Ocena prvog kolokvijuma – $K_1$
3. Ocena drugog kolokvijuma – $K_2$

po sledećoj formuli:
$F = 0{,}25 \cdot V + 0{,}25 \cdot K_1 + 0{,}5 \cdot K_2$;
uz uslov da je $V \geq 5{,}51$. (Tada se izrada vežbi pozitivno vrednuje!)

Raspon svih navedenih ocena je između 0 i 10, a da bi se pozitivno vrednovala, finalna ocena mora da zadovolji uslov: $F \geq 5{,}51$.

AUTORI
Mašinski fakultet u Beogradu
Septembar 2008.

PREDGOVOR DRUGOM IZDANJU

U drugom izdanju ovog Praktikuma, ispravljene su uočene štamparske i druge greške u oznakama i postavkama zadataka, a korigovani su i neki crteži odnosno, grafička rešenja nekih zadataka iz prvog izdanja. Osim toga, uključeno je i poglavlje „Zadaci za dodatnu vežbu“ koje sadrži grupu zadataka za pripremu prvogi drugog kolokvijuma, kao i grupuzadataka za pripremu završnog ispita.Izradom i uvežbavanjem navedenih zadataka, studentima jepružena mogućnost efikasnijeg usvajanja gradiva odnosno, temeljnije i potpunije pripreme za uspešno savladavanje predviđenih provera znanja na predmetu „Konstruktivna geometrija i grafika“.

Na kraju, potrebno je napomenuti da je novo izdanje Praktikuma obogaćeno nizom slika (portreta) znamenitih naučnika (inženjera, konstruktora, geometričara matematičara, ...) koji su dali veliki doprinos različitim oblastima geometrije. Uz svaki portret ličnosti, prikazana je i odgovarajuća, karakteristična teorema, koncept ili nova teorija. Mišljenja smo da će ovaj mali dodatak doprineti povećanju stepena zainteresovanosti studenata za predmet „Konstruktivna geometrija i grafika“.

AUTORI
Mašinski fakultet u Beogradu
Septembar 2010.

PREDGOVOR TREĆEM IZDANJU

Osim ispravki uočenih grešaka, treće izdanje ovog praktikuma dopunjeno je sledećim sadržajima:

1. Deset pravila konstruktivne geometrije, koja sažeto objašnjavaju osnovne položajne i metričke invarijante ortogonalnih projekcija elemenata (tačke, prave i ravni). Navedena su na samom početku praktikuma i studentima pružaju mogućnost da lakše i efikasnije reše zadatke za vežbu odnosno, zadatke za proveru znanja.
2. Novi zadaci iz svih oblasti konstruktivne geometrije koje se predaju na Mašinskom fakultetu u Beogradu.
3. Izabrana poglavlja iz planimetrije, dodata na samom kraju praktikuma, namenjenasu rekapitulaciji gradiva iz nekih oblasti planimetrijei neophodna su za rešavanje, pre svega, zadataka iz konstruktivne geometrije i grafike.

AUTORI
Mašinski fakultet u Beogradu
Septembar 2015

SADRŽAJ


1. 10 PRAVILA KONSTRUKTIVNE GEOMETRIJE ........................ 6

2. VEŽBA 1 ........................................................................ 9

3. VEŽBA 2 ........................................................................ 16

4. VEŽBA 3 ........................................................................ 26

5. VEŽBA 4 ........................................................................ 33

6. VEŽBA 5 ........................................................................ 39

7. VEŽBA 6 ........................................................................ 45

8. ZADACI ZA DODATNU I SAMOSTALNU VEŽBU .................. 52

9. I GRUPA DODATNIH ZADATAKA ............................................ 54

10. II GRUPA DODATNIH ZADATAKA ........................................... 65

11. ZADACI ZA PRIPREMU ZAVRŠNOG ISPITA ........................... 80

12. DODATAK – IZABRANA POGLAVLJA IZ PLANIMETRIJE .... 94

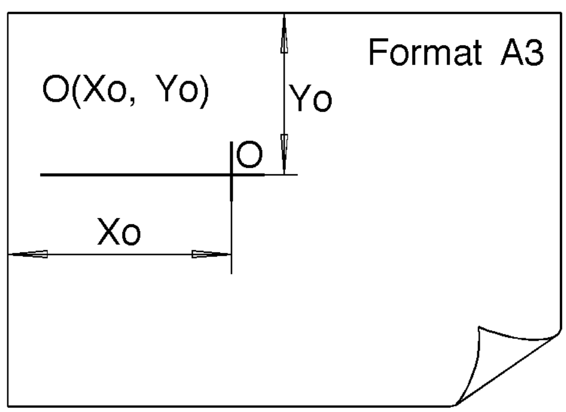
# UVOD

Vežbe iz Konstruktvne geometrije izvode se na standardnom, A3 formatu (420 x 297mm), papira na kome je, u donjem desnom uglu, odštampana tablica za identifikaciju studenata. Svaki student u tablici ubeležava broj tekuće vežbe, svoj registarski broj (broj indeksa), ime i prezime, broj grupe u kojoj vežba i datum izvođenja tekuće vežbe.

Na času vežbanja, neophodan je sledeći pribor za crtanje: dva trougla, metalni šestar velikog raspona, gumica, samolepiva traka i dve tehničke olovke, od kojih je jedna snabdevena HB, a druga 2H grafitnom minom. Tabla za crtanje nije neophodna, ali je poželjna.

Položaj koordinatnog početka za svaki zadatak koji se rešava u ortogonalnim projekcijama određen je parom koordinata $O(X_O, Y_O)$ u odnosu na gornji levi ugao A3 formata. Kao što je prikazano slikom Sl.1., prva, $X_O$ koordinata, meri se po dužoj ivici lista a druga, $Y_O$ koordinata, ortogonalno naniže, po kraćoj ivici A3 formata. Sve koordinate kao i dužinske mere date su u milimetrima, a ugaone veličine u lučnim stepenima.

Pre početka časa vežbanja, student je obavezan da samolepivom trakom učvrsti list za sto ili na tablu za crtanje, popuni identifikacionu tablicu i postavi koordinate svih zadataka iz tekuće vežbe.




Sl.1.

## 10 PRAVILA KONSTRUKTIVNE GEOMETRIJE

1. Objekti 3D prostora, položajne i metričke relacije 3D prostora definisani su uvek u paru ortogonalnih projekcija.

2. Ortogonalna projekcija:
- tačke je tačka
- prave je prava ili tačka (Ako je tačka, zove se zračna projekcija prave i znači da se prava poklopila sa zrakom projektovanja.)
- ravni je ravan ili prava (Ako je prava, zove se zračna projekcija ravni i znači da zraci projektovanja pripadaju toj ravni.)

3. Relacija paralelnosti:
- prave formulisana je aksiomom: u ravni, kroz tačku van date prave postoji jedna i samo jedna prava koja ne seče datu pravu.
- prave i ravni formulisana je teoremom: Prava je paralelna sa ravni ako u toj ravni postoji bar jedna prava koja je paralelna sa datom pravom.
- dve ravni formulisana je teoremom: Ravan 1 je paralelna sa ravni 2, ako u ravni 1 postoje bar dve prave $a_1$ i $b_1$, a u ravni 2 bar dve prave $a_2$ i $b_2$, tako da je prava $a_1$ paralelna sa pravom $a_2$, a prava $b_1$ sa pravom $b_2$.

4. Relacija ortogonalnosti:
- dve prave definisana je preko pojma suplementnog ugla: Dve prave seku se pod pravim uglom, ako je taj ugao jednak svom suplementu.
- prave i ravni formulisana je teoremom Košija: Prava je ortogonalna na ravan akko je u tački prodora kroz ravan ortogonalna na dve prave te ravni.
- dve ravni formulisana je teoremom: Ravan 1 je ortogonalna na ravan 2 ako ravan 1 sadrži pravu koja je ortogonalna na ravan 2.

5. Prave veličine (ortogonalna projekcija bez deformacija) duži i ravni sagledavaju se u paralenim projekcijama. (Ako je duž i ravan paralelna sa projekcijskom osnovom, onda su njihove ortogonalne projekcije bez skraćenja.)

6. Prave veličine rastojanja
- tačke od prave vidi se u onoj ortogonalnoj projekciji u kojoj se duž projektuje zračno.
- tačke od ravni vidi se u onoj projekciji u kojoj se ravan projektuje zračno.
- dve paralelne prave vide se u onoj ortogonalnoj projekciji u kojoj se obe projektuju (vide) zračno.

- prave od paralelne ravni vidi se u onoj ortogonalnoj projekciji u kojoj se ravan projektuju zračno.
- dve paralelne ravni vidi se u onoj ortogonalnoj projekciji u kojoj se obe ravni projektuju zračno.

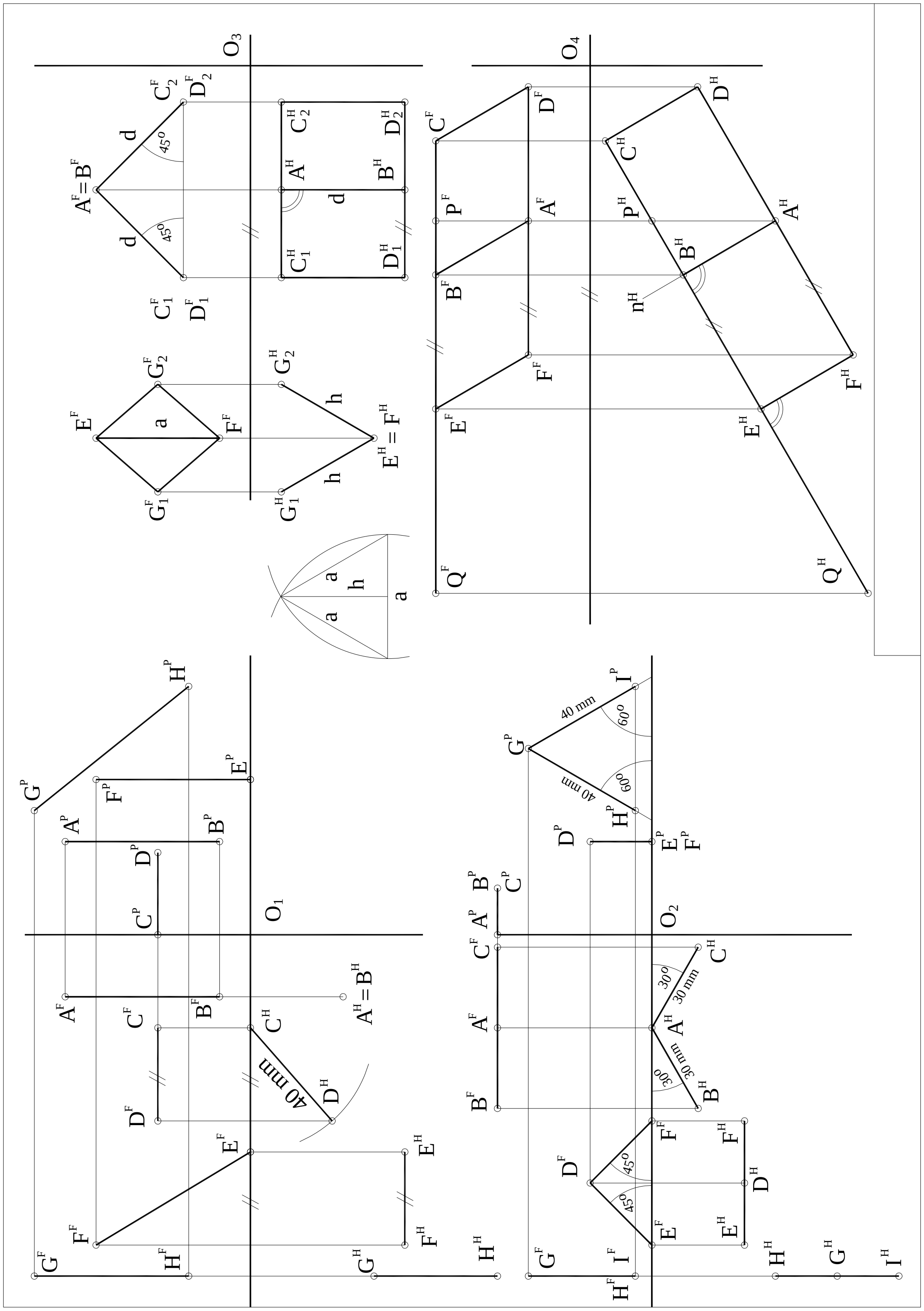
7. Prava veličina ugla između:
- dve prave sagledava se u onoj projekciji u kojoj se obe prave projektuju u pravoj veličini.
- prave i ravni sagledava se u onoj projekciji u kojoj se prava projektuje u pravoj veličini, a ravan zračno (kao prava).
- dve ravni sagledava se u onoj projekciji u kojoj se obe ravni projektuju zračno.

8. Između dve mimoilazne prave:
- prava veličina rastojanja sagledava se u onoj projekciji u kojoj se jedna od ove dve prave projektuje zračno.
- prava veličina ugla mimoilaženja sagledava se u onoj projekciji u kojoj se obe prave projektuju u pravoj veličini.

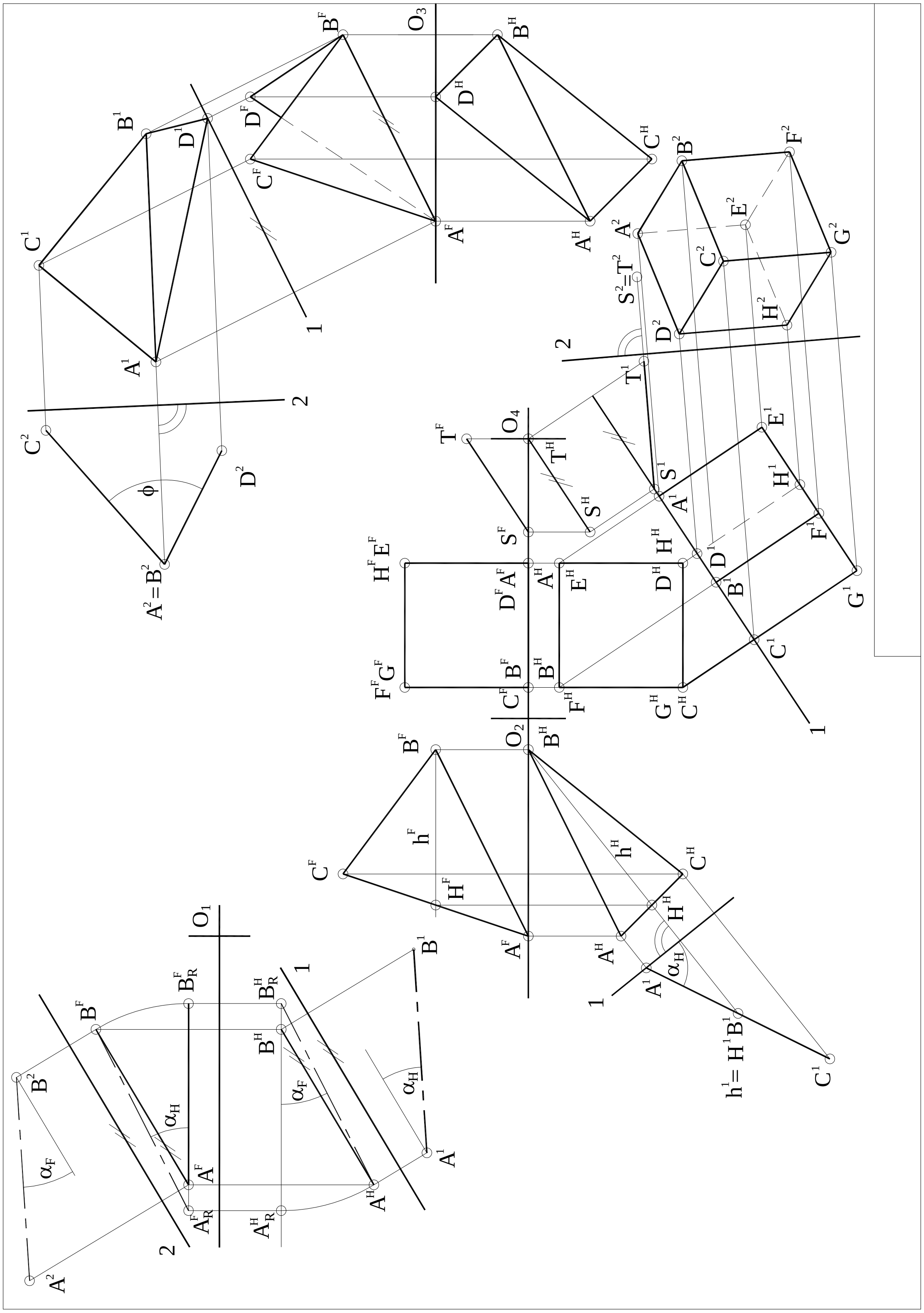
9. Da bi se u ortogonalnoj projekciji prav ugao sagledao u pravoj veličini dovoljno je da se u toj istoj projekciji bar jedan njegov krak sagledava u pravoj veličini.

10. Vidljivost: Dva predmeta projektuju se na neku projekcijsku osnovu tako da je vidljiv onaj koji je od te osnove dalji. Predmet udaljeniji od neke projekcijske osnove zaklanja predmete koji su toj osnovi bliži.

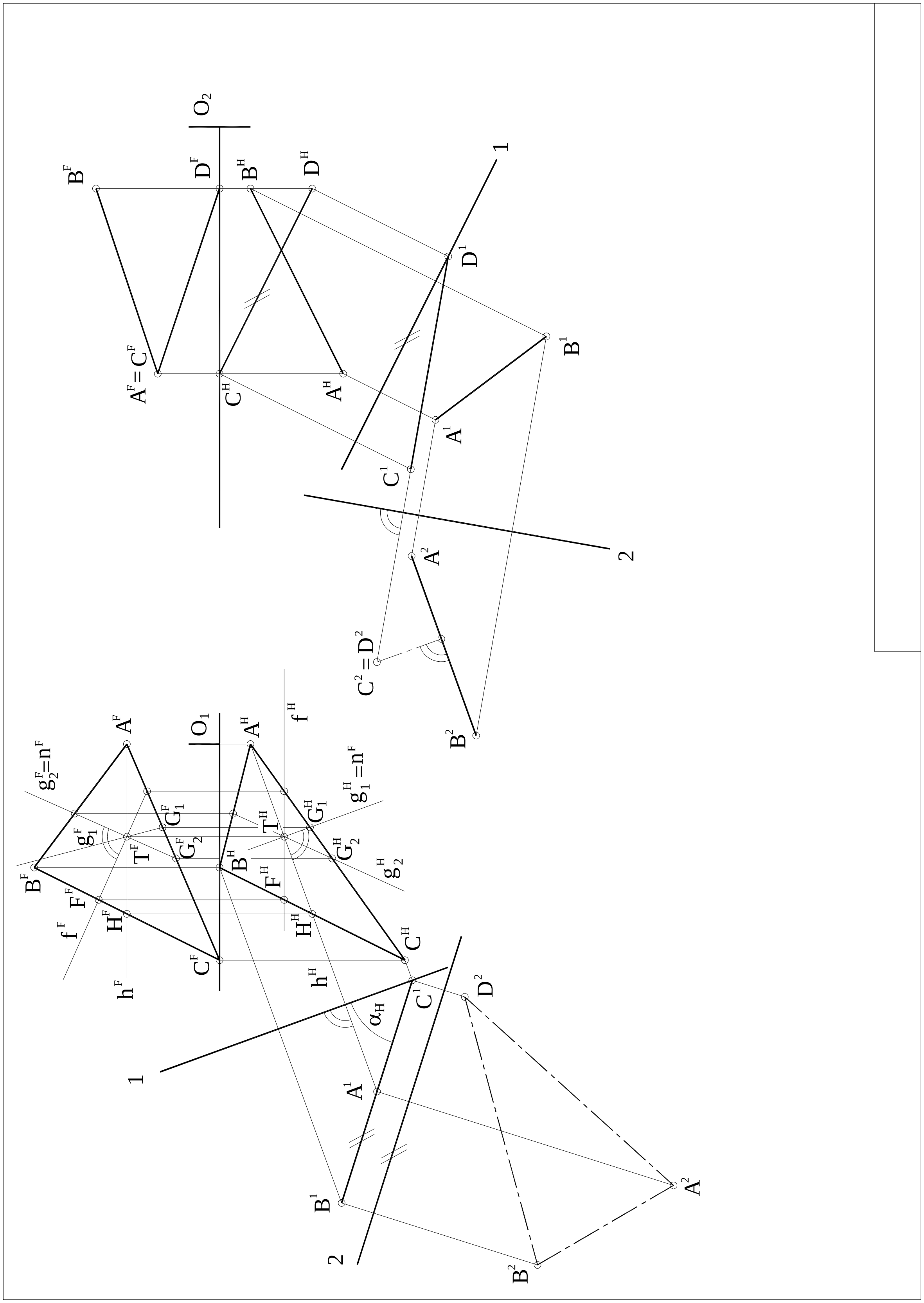

Gaspard Monge (Gaspar Monž) (1746 – 1818)
Tvorac deskriptivne (konstruktivne) geometrije



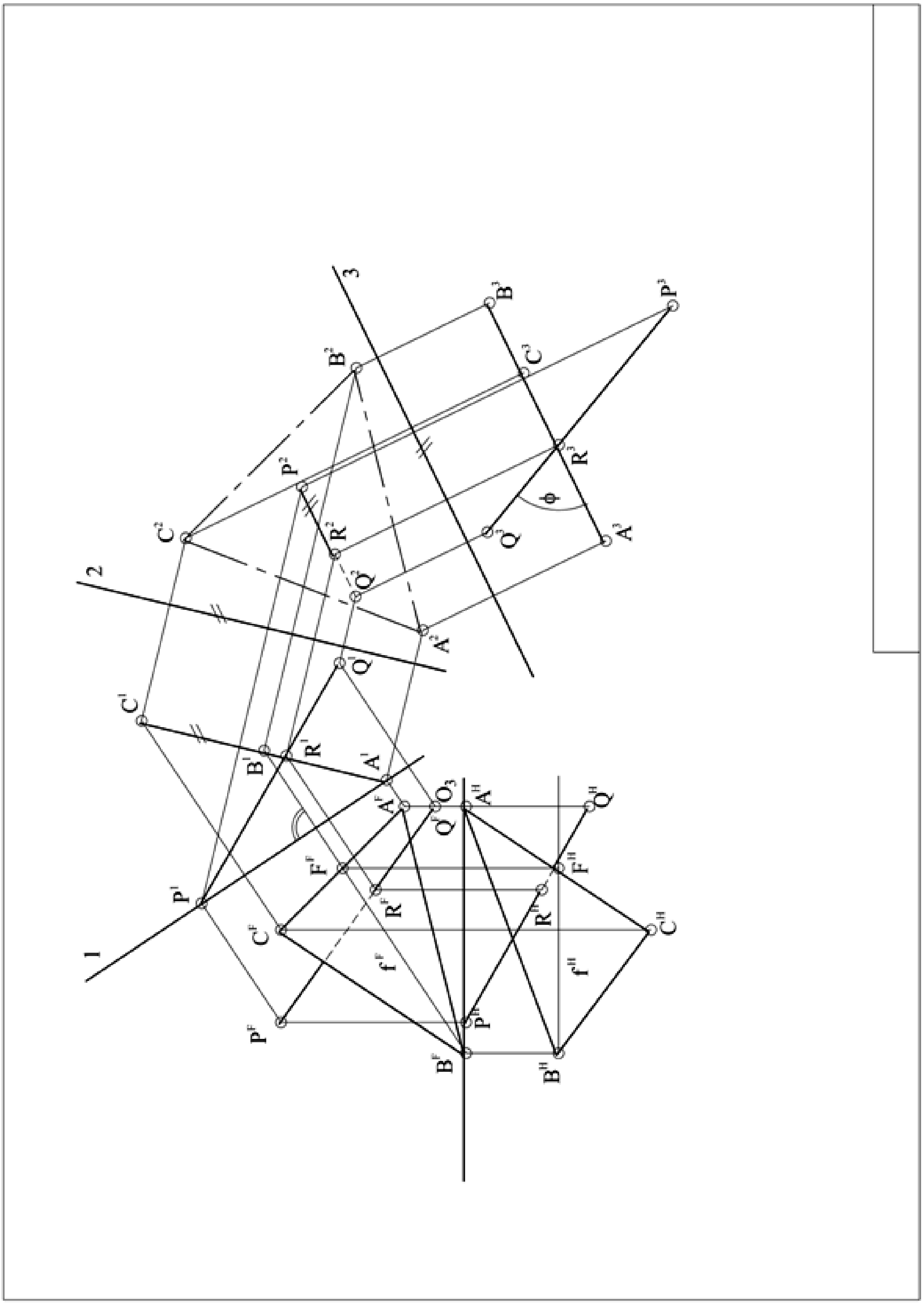

Sl. 1.0.



Sl. 2.0.

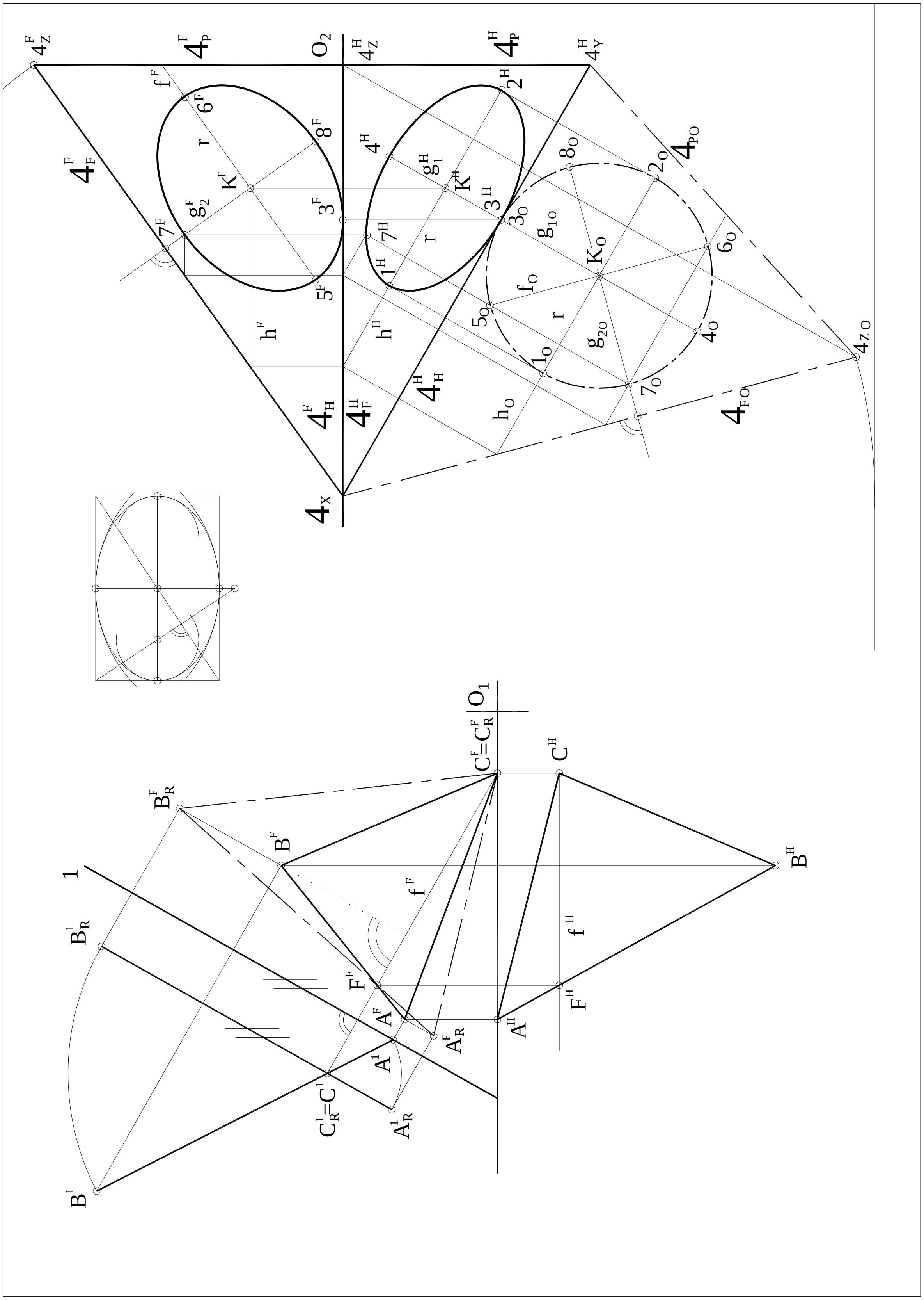


Sl. 3.0.a.

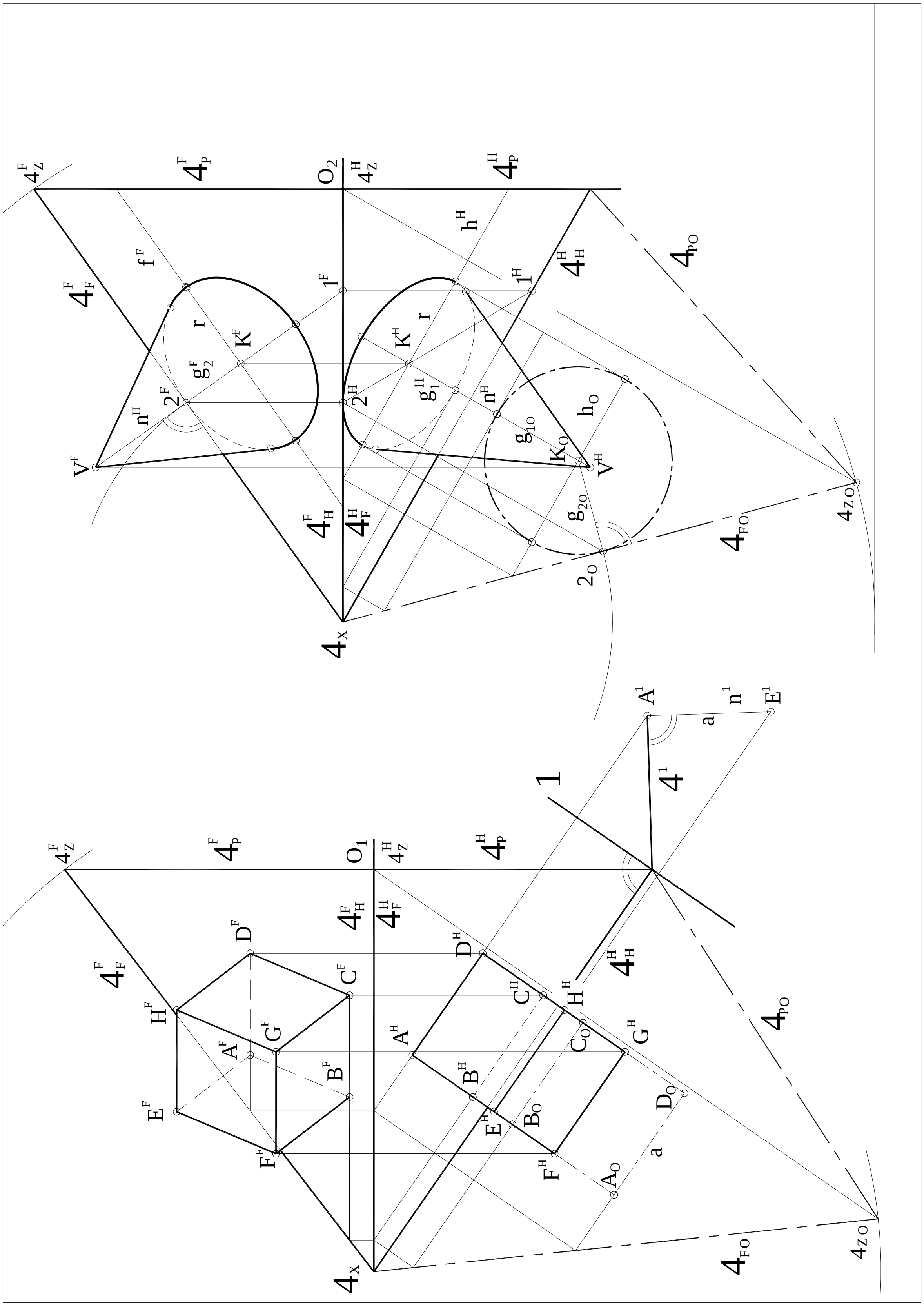


1
2
3
$A^1$
$B^1$
$C^1$
$P^1$
$Q^1$
$R^1$
$A^2$
$B^2$
$C^2$
$P^2$
$Q^2$
$R^2$
$A^3$
$B^3$
$C^3$
$P^3$
$Q^3$
$R^3$
$\phi$
$O_3$
$A^F$
$B^F$
$C^F$
$F^F$
$P^F$
$Q^F$
$R^F$
$f^F$
$A^H$
$B^H$
$C^H$
$F^H$
$P^H$
$Q^H$
$R^H$
$f^H$

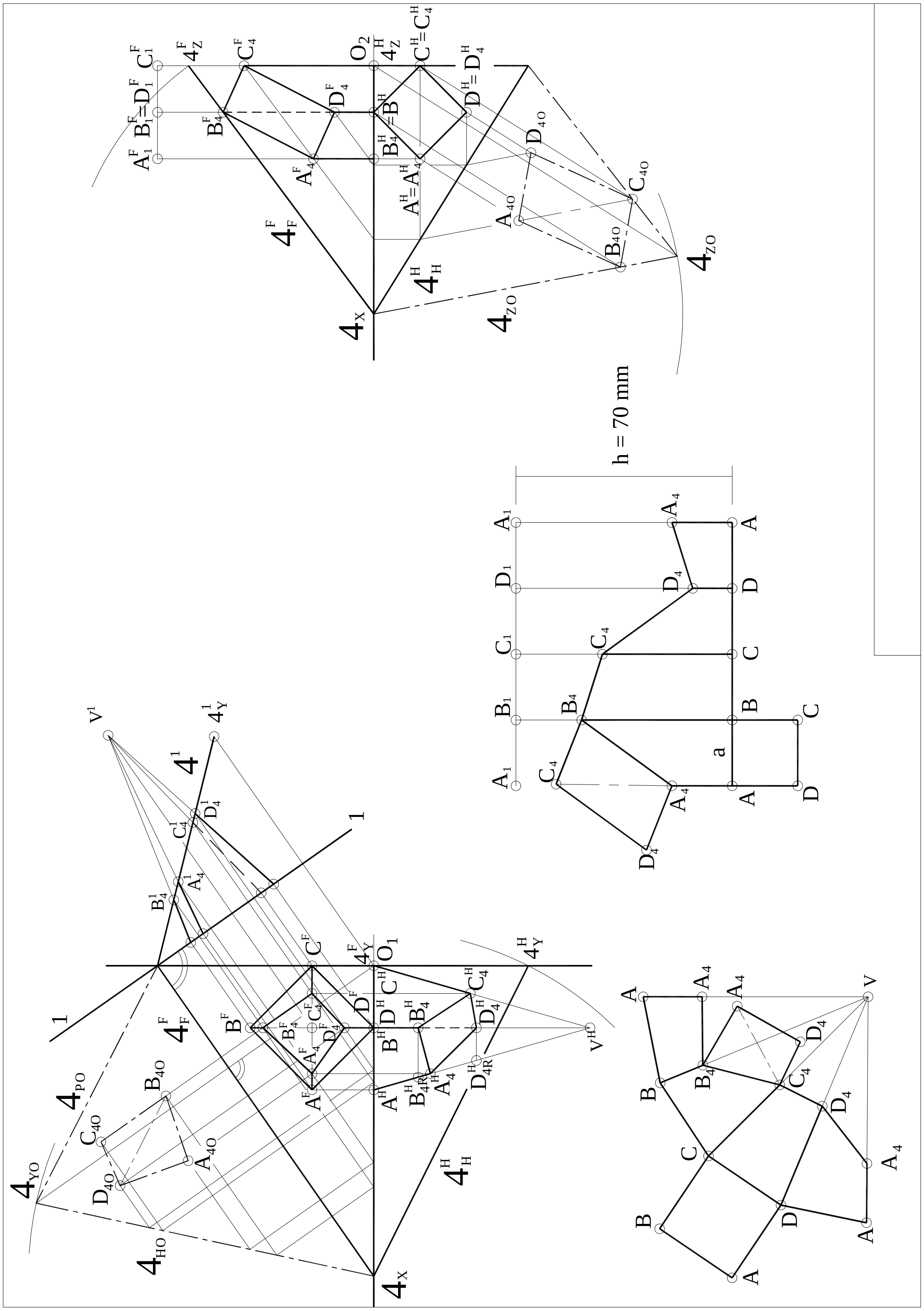

Sl. 3.0.b.



Sl. 4.0.



Sl.5.0.




Sl.6.0.

# ~ DODATAK ~

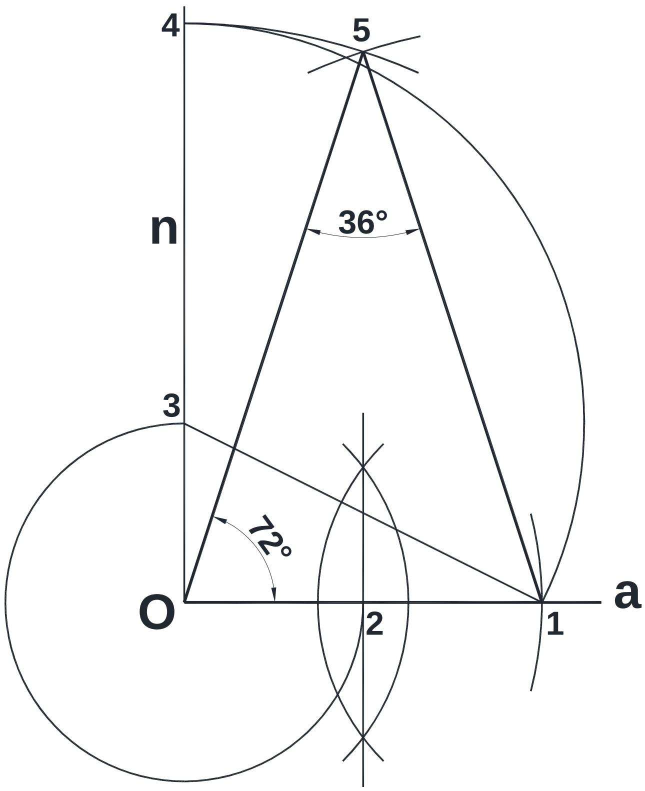
## IZABRANA POGLAVLJA
## IZ
# PLANIMETRIJE

Ovaj deo praktikuma posvećen je rekapitulaciji gradiva iz nekih oblasti planimetrije kojasu neophodna za rešavanje, pre svega, položajnih i metričkih zadataka iz konstruktivne geometrije i grafike. Takođe je poznavanje planimetrije značajno za ispravno oblikovno i dimenziono definisanje (posebno za razumevanje uvrednjavanja – "kotiranja") različitih mašinskih delova, koje se predaje na kursevima inženjerske grafike i tehničkog crtanja. Osim toga, izložene definicije, teoreme i geometrijske konstrukcije mogu da budu korisna pomoć i prilikom savladavanja gradiva iz nekih drugih predmeta i kurseva koji se predaju na Mašinskom fakultetu u Beogradu, svuda tamo gde se planimetrija koristi i gde se podrazumeva da je već savladana i usvojena.

Posebno naglašavamo da crtanje i skiciranje, koji se tako često koriste u svim oblastima mašinstva, ne mogu biti sprovedeni korektno ukoliko se ne poznaju i ne koriste bar elementarne planimetrijske konstrukcije. Jer, kao što se ne može ništa napisati ispravno i smisleno čak ni na maternjem jeziku bez poznavanja normativne gramatke tog maternjeg jezika, tako se ne može ni grafički i vizuelno sporazumevati bez znanja planimetrije – nezavisno da li se crta slobodnom rukom ili pomoću neke kompjuterske aplikacije. Zato se savetuje svim studentima da prouče i zapamte gradivo iz ovog dodatka postojećem praktikumu, a posebno onima koji su planimetriju zaboravili ili je nikada nisu ni učili u osnovnoj ili srednjoj školi.

U ovom dodatku praktikuma izabrana su i obrađena sledeća poglavlja iz planimetrije:

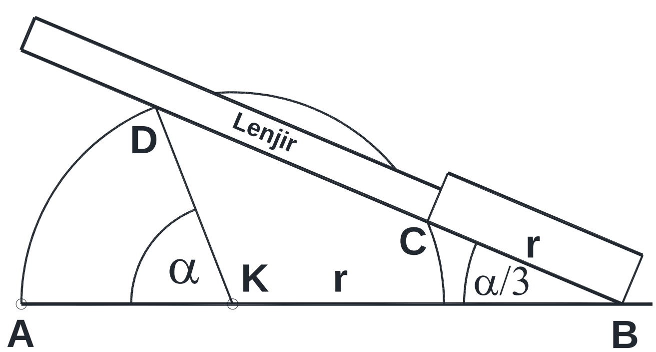
0. Upotreba trougaonih lenjira za crtanje
1. Značajne tačke u trouglu
2. Podudarnost i sličnost trouglova
3. Simetrala duži i ugla; podela duži na jednake delove; konstrukcije nekih uglova
4. Konstrukcije nekih pravilnih poligona
5. Pitagorina teorema
6. Neki stavovi o kružnici
7. Približne rektifikacije kružnice i kružnog luka
8. Konstrukcije elipse




Slika D3-7
*Konstrukcija uglova od $36^0$i $72^0$*

Na slici D3-7 prikazana je nešto složenija konstrukcija uglova od $36^0$ i $72^0$. Na proizvoljnoj polipravoj *Oa* uočena je proizvoljna tačka *1* i konstruisana simetrala duži *O1* koja polovi ovu duž u tački *2*. (Ili je proizvojna dužina *O2* udvostručena do tačke *1*.) U tački *O* konstruisana je normala *n* na polupravu *Oa* i na tu normalu prenesena je dužina *O2* tako da *O2=O3*. Kružnim lukom, sa centrom u tački *3*, poluprečnika $r = \overline{31}$, zasečena je normala *On* u tački *4*. I konačno, određena je presečna tačka *5* dva kružna luka jednakih poluprečnika *r=O4*, sa centrima u tački *O* i tački *1*. Kao što je prikazano na slici D3-7, trougao $\Delta O15$ je jednakokrak, sa uglovima $\angle 5O1=72^0$, $\angle O51=36^0$. Izloženi postupak koristi se, između ostalog, za konstruisanje zlatnog preseka odnosno, zlatne razmere, pravilnog petougla, pentagrama i pravilnog desetougla.

Pomenimo i trisekciju ugla koja, kao što je poznato, ne može da se ostvari klasičnom upotrebom šestara i lenjira odnosno, kružnice i prave. Međutim, uz malu modifikaciju pojma „lenjir“, kao i njegove upotrebe, ova konstrukcija može da se realizuje apsolutno tačno. Naime, neophodno je da se dozvoli označavanje dužina na lenjiru (što je inače zabranjeno u klasičnim geometrijskim konstrukcijama). Na slici D3-8 prikazan je postupak apsolutno tačne trisekcije ugla *α*.

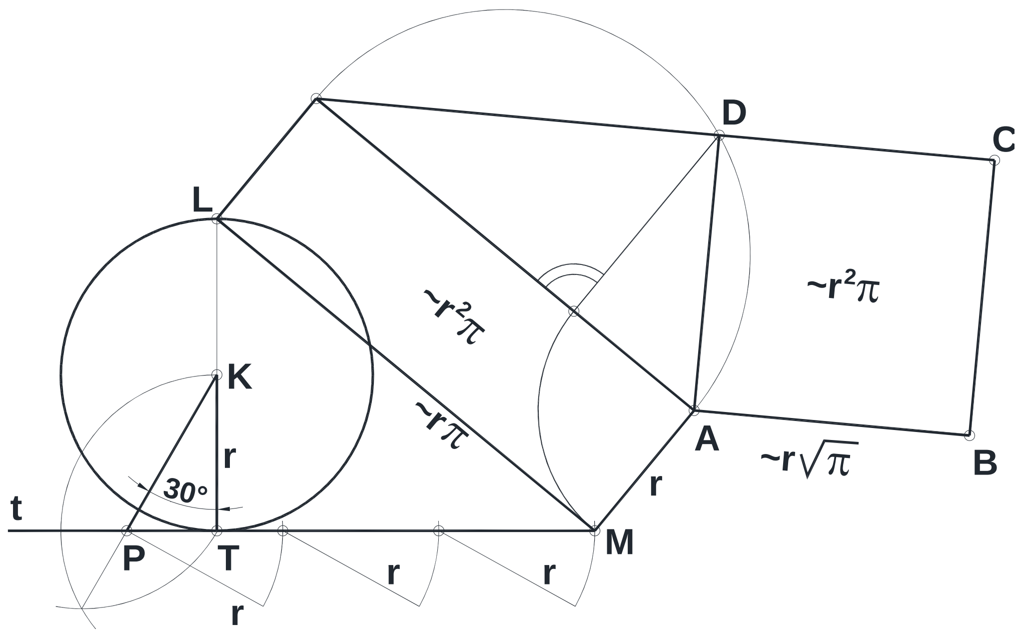



Slika D3-8
*Trisekcija ugla α*

Na jednom kraju lenjira označena je proizvoljna dužina *r*. Sa centrom u temenu *K*, opisan je polukrug poluprečnika *r* koji seče krake ugla *α* u tačkama *A* i *D*. Lenjir se postavlja tako da jedan kraj označene dužine *r* leži na pravoj *AK* u tački *B*, a da drugi kraj te iste dužine *r* pripada periferiji polukruga u tački *C*. Lenjir se zatim pomera tako da tačka *B* klizi po pravoj *AK*, a u isti mah tačka C po kružnici sve dok tačka *D* ne pripadne ivici lenjira. U tom specifičnom položaju, koji je prikazan na slici D3-8, izvršena je trisekcija ugla *α,* tako da je $\angle DBA = \frac{1}{3}\alpha$.

# 7. PRIBLIŽNE REKTIFIKACIJE KRUŽNICE I KRUŽNOG LUKA

Pod pojmom rektifikacija krive linije podrazumeva se njeno ispravljanje odnosno, određivanje dužine te krive. Rektifikacija kružnice, tj. izračunavanje njenog obima *"$2r\pi$"*, kao i kvadratura kruga *"$r^2\pi$"* ne mogu se izvršiti apsolutno tačno, niti numeričkim, niti geometrijskim sredstvima, jer je konstanta $\pi$ transcendentan broj. Zato su moguće samo približne rektifikacije i kvadrature, sa ograničenom tačnošću. Najviše se koriste za razvijanje mreža površi konusnih i cilindričnih delova od lima. Na slici D7-1 prikazana je približna geometrijska rektifikacija kružnice po metodi Adama Kohanskog i približna kvadratura kruga, saglasno Euglidovim stavovima o srednjim geometrijskim proporcionalama u pravouglom trouglu.




Slika D7-1

*Približna rektifikacija kružnice po Adamu Kohanskom i približna kvadratura kruga*

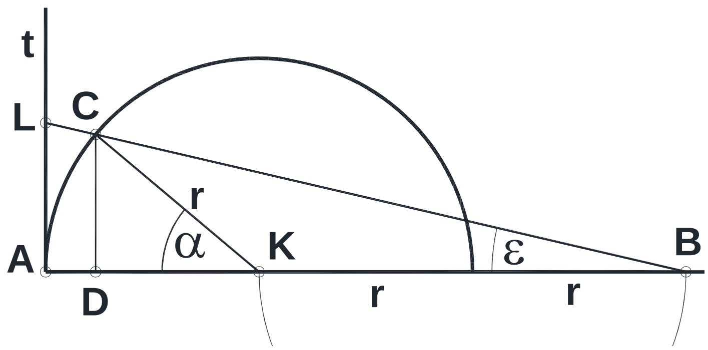
Na kružnici poluprečnika $r$, čija se rektifikacija (dužina obima) traži, uočen je prečnik, na primer $LT$ i u tački $T$ nacrtana je tangenta $t$ ove kružnice. Ne menjajući raspon šestara, koji je uvek jednak poluprečniku $r$, konstruisan je uz krak $KT$ (polovljenjem ugla od $60^0$) ugao od $30^0$. Kao što je prikazano na slici D7-1, drugi krak ugla od $30^0$ seče tangent $t$ u tački $P$. Od tačke $P$, duž tangente $t$, nanesen je tri puta polurečnik $r$ i dobijena je tačka $M$. Dužina $LM$ približno je jednaka poluobimu $\sim r\pi$ ove kružnice. Da bi procenili grešku rektifikacije, odredićemo algebarski dužinu $LM$:

$$LM = \sqrt{(LT)^2 + (TM)^2} = \sqrt{(3r - r\tan 30^0)^2 + 4r^2} = r\sqrt{\left(3 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 4};$$

$LM = r\sqrt{\frac{40-6\sqrt{3}}{3}} = r \cdot 3{,}1415333387\ldots$; Dakle, rektifikacija Kohanskog približno određuje broj $\pi \approx 3{,}1415333\ldots$. U poređenju sa brojem $\pi$ na sedam tačnih decimal $\pi=3.1415926\ldots$, relativna greška ove aproksimacije manja je od $|\delta| < 1.9 \cdot 10^{-5}$. To praktično znači da će greška obima kružnice, na primer, poluprečnika $r = 1000\ mm$, određena po ovoj metodi, biti manja od *0,12 mm*. Treba zapamtiti da je rektifikacija kružnice po metodi Adama Kohanskog jedna od najjednostavnijih, a u isti mah toliko visoke tačnosti da potpuno zadovoljava sve praktične primene.

Na slici D7-1, osim rektifikacije, prikazana je približna kvadratura kruga. Dužina $AD = r\sqrt{\pi}$ konstruisana je kao geometrijska sredina brojeva *r* i *rπ,* i predstavlja stranicu kvadrata površine $r^2\pi$, tj. kvadrata čija je površina jednaka površini datog kruga poluprečnika *r*.

Na slici D7-2 prikazana je konstrukcija približne rektifikacije kružnog luka, po metodi Snel – Kuzanus (Willebrord van Royen Snell, Nicholas Cusanus). Da bi se izvršila rektifikacija odnosno, odredila dužina datog kružnog luka *AC*, sa centrom u tački *K*, poluprečnika *r* i ugaone mere *α*, najpre je uočena tangenta *t* na kružni luk u tački *A*. Zatim je duž prave *AK*, od tačke K nanesen prečnik *2r* i dobijena tačka *B*. Zrak *BC* seče tangentu *t*u tački *L*. Dužina *p=AL* približno je jednaka dužini kružnog luka *AC*. Da bi procenili grešku ove aproksimacije, odredićemo algebarski izraz za dužinu *p=AL*.




$LA = AB \cdot \tan\varepsilon, \tan\varepsilon = \frac{CD}{DB}$
$CD = r\sin\alpha\,, DB = DK + KB,$
$DK = r \cdot \cos\alpha,$
$KB = 2r, AB = 3r,$

Približna rektifikacija
kružnog luka *AC*
~ rektifikacija Snel-Kuzanus ~

$$p = LA = \frac{3\sin\alpha}{2+\cos\alpha} \cdot r$$

Slika D7-2
*Približna rektifikacija kružnog luka po metodu Snel - Kuzanus*

U tablici T, prikazane su apsolutne greške *l-p*, relativne greške *(l-p)/l* rektifikacije kružnih lukova poluprečnik *r=1*, za tri ugaone mere *α*.

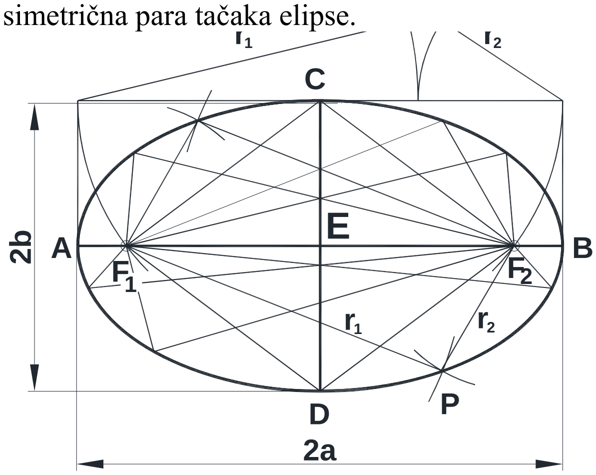
| α | $l = \frac{\alpha \cdot \pi}{180} \cdot r$ | $p = \frac{3\sin\alpha}{2+\cos\alpha} \cdot r$ | $l - p$ manje od: | $(l-p)/l$ manje od: |
|---|---|---|---|---|
| $10^0$ | 0.1745329 | 0.1745320 | 0.000001 | $5.2 \cdot 10^{-6}$ |
| $20^0$ | 0.3490658 | 0.3490366 | 0.00003 | $8.5 \cdot 10^{-5}$ |
| $30^0$ | 0.5235988 | 0.5233729 | 0.00023 | $4.5 \cdot 10^{-4}$ |

Tablica T

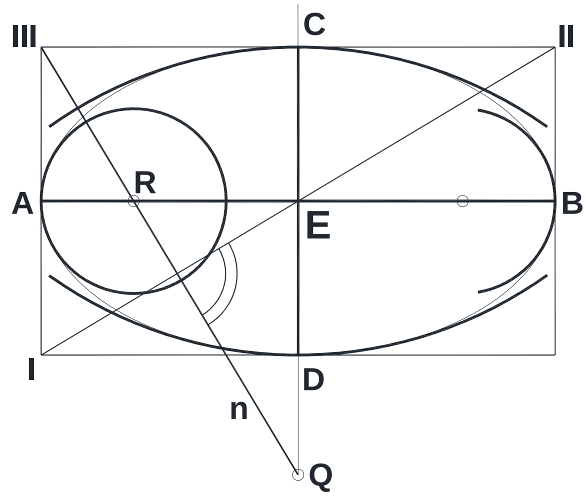
To praktično znači da će apsolutna greška određivanja dužine kružnog luka po opisanoj metodi Snel - Kuzanusbiti manja od jednog stotog dela milimetra *(l-p*<0,01 mm) za kružne lukove ugaone mere $\alpha=10^0$čiji su poluprečnici *r<10.000 mm (10 m),* ugaone mere $\alpha=20^0$za *r<333,33 mm,* augaone mere$\alpha=30^0$za*r<43,47 mm.* Može se konstatovati da je i ova metoda rektifikacije jednostavna i u praksi vrlo primenljiva.

## 8. KONSTRUKCIJE ELIPSE

Elipsa je ravanska kriva drugog redasa osobinom da je zbir rastojanja ma koje njene tačke od dve stalne tačke $F_1$ i $F_2$ konstantan i jednak velikoj osi $2a$. Tačke $F_1$ i $F_2$ zovu se žiže ili fokusi elipse. Iz ove definicije proishode konstrukcije prikazane na slici D8-1. Pre svega, ako su poznate žiže i velika osa elipse, mala osa $b$ dobija se kao kateta $EC$ pravouglog trougla $\Delta F_1EC$, u kome je hipotenuza $F_1C=a$. Ako su poznate i velika i mala poluosa, žiže elipse $F_1$ i $F_2$ dobijaju se na preseku pravca velike poluose sa kružnim lukom poluprečnika $r=a$, sa centrom u temenu $C$ ili $D$. Proizvoljna tačka $P$ elipse konstruiše se (slika D8-1) kao presek dva kružna luka sa centrima u žižama, poluprečnika $r_1=l,\ 0<l<2a$ i $r_2=2a-l$. Kako elipsa ima dve ortogonalne ose simetrije, jedan izabrani par radijusa $r_1$ i $r_2$ određuje ukupno četiri tačke elipse odnosno, dva ortogonalno simetrična para tačaka elipse.




Slika D8-1
*Konstrukcija elipse po definiciji $r_1+r_2=2a$*

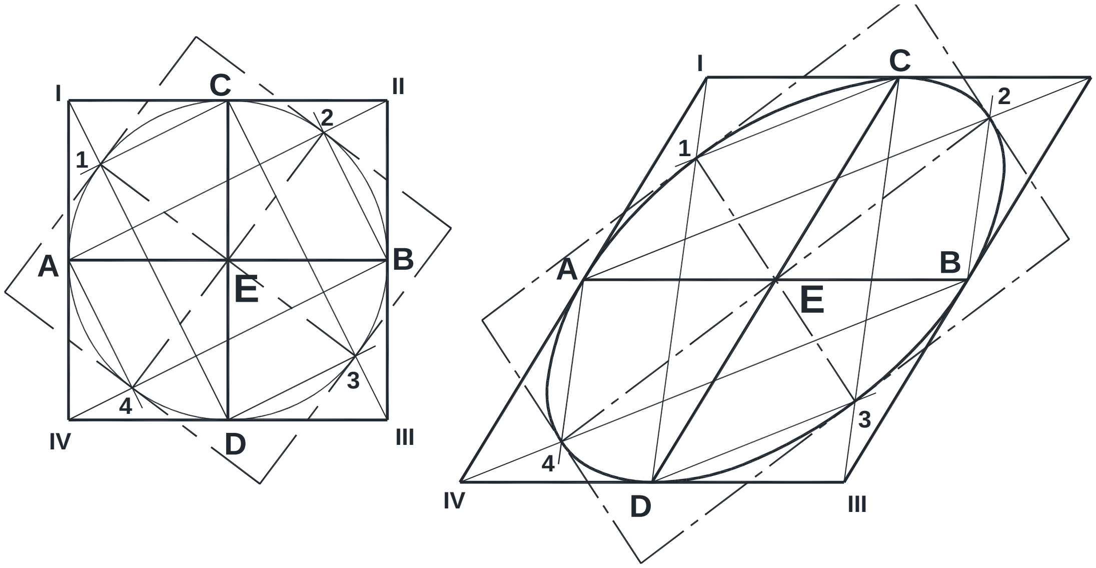



Slika D8-2
*Lukovi kružnica zakrivljenosti u temenima elipse*

Na slici D8-2 prikazana je pomoćna konstrukcija elipse, ako je poznate njena velika i mala osa. Ona se zasniva na korišćenju temenih oskulatornih kružnica odnosno, lukova kružnica zakrivljenosti u temenima elipse. U temenima $A$, $B$, $C$ i $D$ uočene su tangent elipse i formiran je tangencijalni pravougaonik. Prava $n$, koja sadrži teme $III$, a ortogonalna je na dijagonalu $I$-$II$ ovog tangencijalnog pravougaonika, seče veliku osu elipse u tački $R$, a pravac male ose u tački $Q$. Tačka $R$ centar je krivine za teme $A$, sa poluprečnikom krivine $r=RA=b^2/a$ , a tačka $Q$ centar je krivine za teme $C$ ove elipse, sa poluprečnikom krivine $r=QC=a^2/b$. Centri krivina za temena $B$ i $D$ ortogonalno su simetrični centrima $R$ i $Q$, u odnosu na odgovarajuće ose elipse. Kao što je prikazano na slici D8-2, lukovi kružnica zakrivljenosti olakšavaju skiciranje elipse. Treba zapaziti i, pri skiciranju elipse, uvažiti činjenicu da kružnicu krivine većeg prečnika elipsa dodiruje sa unutrašnje strane, a onu manjeg prečnika sa spoljašnje strane.

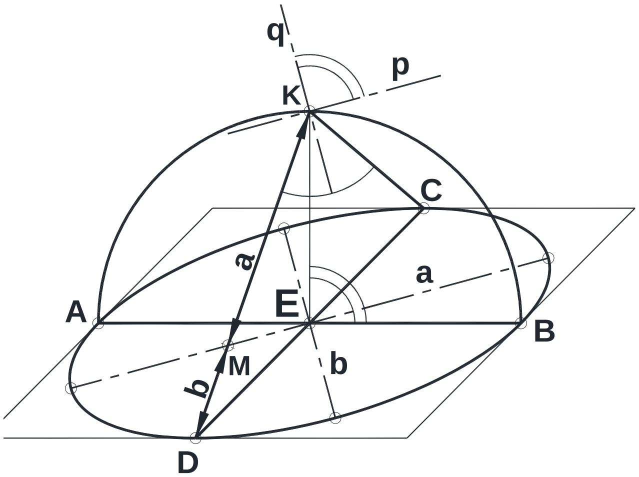
Na slici D8-3 prikazano je konstuisanje elipse po metodi “8 tačaka i 8 tangenti”, koja potiče od profesora dr Milorada Jovićića. Izvedena je kosim projiciranjem odnosno, afinim preslikavanjem kruga i može se primeniti uvek kada je elipsa definisana bilo kojim parom spregnutih prečnika. (Dva prečnika elipse su spregnuta ili konjugovana ako su tangente na krajevima jednog paralelne sa drugim prečnikom, a tangent na krajevima drugog paralelne sa prvim prečnikom.)

Kao št je prikazano na slici D8-3, uočavanjem tangenti na krajevima zadatog para spregnutih prečnika *AB* i *CD* formiran je tangencijalni paralelogram *I-II-III-IV*. Postavljene su prave u tačkama *A* i *B*, paralelno dužima *I-DIC-III,* a u tačkama *C* i *D*, paralelno dužima *A-II* i *IV-B*. Njihovim presecima definisane su četiri nove tačke elipse: *1, 2, 3* i *4* odnosno, dva nova para spregnutih prečnika elpse *1-3* i *2-4*. Tangente u tačkama *1* i *3* paralelne su prečniku *2-4*, a tangent u tačkama *2* i *4* paralelne su prečniku *1-2*. Korišćenjem posojećih 8 tačaka i 8 tangenti moguće je korektno skicirati elipsu.




Slika 8-3
*Konstrukcija elipse metodom "8 tačaka i 8 tangenti"*

Na slici D8-4 data je konstrukcija velike *a* i male ose *b* elipse na osnovu zadatog para njenih spregnutih prečnika *AB* i *CD*. Konstrukcija potiče takođe od dr Milorada Jovičića. Nad većim prečnikom AB opisana je polovina kružnice i uočen je njen poluprečnik *EK⊥AB*. Ova kružnica se na dva načina koso projektuje (afino preslikava) u datu elipsu: zracima paralelnim sa *KC* ili zracima paralelnim sa *KD*. Simetrala *q* ugla *∠DKC* i prava *p⊥q* definišu veliku i malu osu elipse po pravcu. Ovi pravci, paralelno pravama *p* i *q*, postavljeni su u centru elipse *E*. Kao što je prikazano na slici D8-4, pravac velike poluose kroz centar elipse *E* seče zrak *KD* u tački *M*. *KM=a* je velika poluosa, a *MD=b*je mala poluosa elipse. Ove veličine prenesene su na pravce velike i male ose elipse, čime je omogućeno konstruisanje tačaka elipse po definiciji, kao i određivanje lukova kružnica zakrivljenosti u temenima ove krive drugog reda.




Slika D8-4
*Konstrukcija velike i male ose elipse na osnovi zadatog para spregnutih prečnika*

Ako su poznate velika *a* i mala *b* poluosa elipse, površina elipse izračunava se po formuli: $P = a \cdot b \cdot \pi$. Obim elipse može se egzaktno izraziti kompletnim eliptičkim integralom druge vrste, a ovaj integral stepenim redom. Kako su ovi izrazi komplikovani za praktična izračunavanja, koriste se približne, jednostavnije formule. Jedna od takvih je Zafarijeva aproksimacija (Shahram Zafari):

$$O = 4 \cdot (a + b) \cdot \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\left(\frac{4 \cdot a \cdot b}{(a+b)^2}\right)}$$

Georg Fridrih Bernhard Riman (1826-1866)

Nemački matematičar koji je dao značajan doprinos razvoju neeuklidskih geometrija. Tvorac je tzv. Rimanove geometrije, koja predstavlja matematičku osnovu Opšte teorije relativnosti.

LITERATURA

[1] Gagić Ljubica;
*Nacrtna geometrija*; Građevinski fakultet; Beograd 1991.

[2] Dovniković Lazar;
*Nacrtna geometrija*; Univerzitet u Novom Sadu; 2001.

[3] Đurović Vinko;
*Nacrtna geometrija*; Naučna knjiga; Beograd, 1989.

[4] Mojović Milica;
*Tehnička nacrtna geometrija*; Naučna knjiga; Beograd, 1992.

[5] Boris Apsen;
Repetitorij elementarne matematike; Tehnička knjiga; Zagreb, 1977.