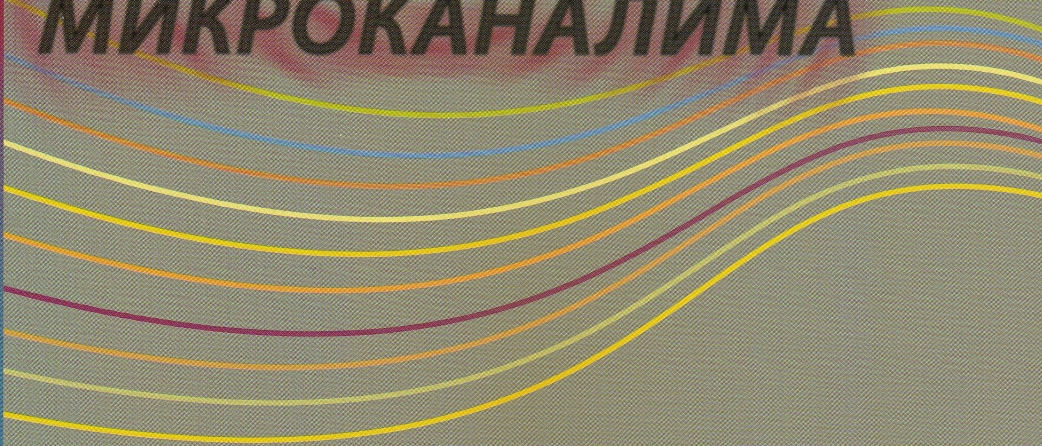


УНИВЕРЗИТЕТ У БЕОГРАДУ
МАШИНСКИ ФАКУЛТЕТ

Невена Д. Стевановић

**СТРУЈАЊЕ
РАЗРЕЂЕНИХ
ГАСОВА У
МИКРОКАНАЛИМА**



Београд, 2010

**Машински факултет
Универзитет у Београду**

Невена Д. Стевановић

**СТРУЈАЊЕ РАЗРЕЂЕНИХ ГАСОВА У
МИКРОКАНАЛИМА**

Београд, 2010

Доцент др Невена Д. Стевановић

СТРУЈАЊЕ РАЗРЕЂЕНИХ ГАСОВА
У МИКРОЛАНАЛИМА
Прво издање

Рецензенти:

Проф. др Владан Д. Ђорђевић, академик САНУ
Проф. др Ђуро Коруга, Машински факултет, Београд
Проф. др Љубодраг Савић, Грађевински факултет, Београд

Издавач:

Машински факултет, Универзитет у Београду
Краљице Марије 16, 1120 Београд 35, Србија
Тел: +381 (0)11 3370 350;
Факс: +381 (0)11 3370 364

За издавача:

Декан проф др. Милорад Милованчевић

Главни и одговорни уредник:

Проф. др Александар Обрадовић

Штампа:

ПЛАНЕТА ПРИНТ,
Рузвелтова 10,
11 000 Београд, Србија

ПРЕДГОВОР

Развој микро електро механичких система (МЕМС) подстакао је развој различитих области науке и технике. Како су ови уређаји величине реда μm , неопходно је узети у обзир утицај разређености при анализи струјања гаса у њима. У монографији су приказани резултати који су добијени новим приступом у решавању изотермског стишљивог струјања гаса у микроканалима. Уобичајено је да се струјања са клизањем, што је најчешћи режим струјања гасова у МЕМС уређајима, решавају коришћењем једначина континуума и граничних услова клизања на зиду. У циљу постизања веће тачности и могућности примене модела на већи опсег Кнудсенових бројева, у појединим приказаним моделима је коришћен гранични услов другог реда. То је условило коришћење и једначине количине кретања другог реда тј. Барнетове једначине. Решења појединих проблема су добијена пертурбационом методом. Развијени теоријски приступ је омогућио налажење решења за неке моделе струјања који до сада нису аналитички решени. То су струјања гаса кроз микроканале променљивог попречног пресека као и струјања гаса у микролежајима са једним порозним зидом чиме се може повећати њихова носивост. Такође, решење је добијено и за струјање гаса у порозном аеростатичком микролежају, што се описује моделом струјања гаса кроз микроканал са једним порозним зидом кроз који струји гас у истом смеру као и унутар лежаја.

Већи део приказаних резултата добијен је кроз учешће у научноистраживачким пројектима „Савремени проблеми механике флуида“ (1328, 2002-2005. год.) и „Нелинеарни феномени и динамика комплексних система и флуидних токова“ (144022, 2005-2010. год.) Аутор захваљује Министарству за науку и технолошки развој Републике Србије, које је финансирало ове пројекте и одобрило средства за објављивање ове монографије. Такође захваљујем реценцентима и Машинском факултету Универзитета у Београду.

Београд, јануар 2010. год.

А у т о р

САДРЖАЈ:

1. УВОД	6
1.1 Струјање флуида у микросистемима	7
1.2 Гранични услови	11
1.3 Преглед досадашњих истраживања струјања гаса кроз	15
1.4 Модели струјања разређеног гаса	20
2. СТРУЈАЊЕ ГАСА У МИКРОКАНАЛИМА	22
2.1 Струјање гаса при малим вредностима Рејнолдсовог броја	28
2.2 Струјање гаса при умерено великим вредностима Рејнолдсовог броја	43
3. СТРУЈАЊЕ ГАСА У МИКРОЛЕЖАЈИМА	52
3.1 Струјање гаса у микролежајима са порозним зидом при малим вредностима Рејнолдсовог броја	56
3.2 Струјање гаса у микролежајима са порозним зидом при умерено великим вредностима Рејнолдсовог броја	65
3.3 Струјање гаса у микролежајима без порозног зида	72
4. ТАЧНО РЕШЕЊЕ ЗА СТРУЈАЊЕ ГАСА КРОЗ МИКРОЛЕЖАЈЕ	84
5. СТРУЈАЊЕ ГАСА КРОЗ МИКРОКАНАЛЕ СА ПОРОЗНИМ ЗИДОМ	97
ОЗНАКЕ	115
ЛИТЕРАТУРА	117

"Колико пута сте, док поправљате нешто веома мало као што је ручни сат ваше жене, помислили: "Када бих само могао да обучим мрава да уради ово!" Пада ми на памет и могућност да мрав увежба неког још мањег од себе да уради овај посао. Питам се које су могућности малих покретних машина? Оне могу али не морају бити корисне, али сигурно је забавно правити их." (Richard Feynman, 1959)

1. УВОД

Познати физичар Ричард Фејман (Richard Feynman) је на годишњем скупу Америчког друштва физичара које је одржано 1959. године у свом предавању под називом "There's Plenty of Room at the Bottom" наговестио развој нових области физике. Један од тада најављених нових праваца била је производња и управљање малим уређајима (Feynman, 1959). Његова предвиђања су се остварила и у последње три деценије развијена је технологија производње микромашина. Као што је Фејман предвидео, њихова израда представља изазов за научнике, али осим тога показало се да су микромашине веома корисне и да су нашле своје место у многим областима науке и технике.

Данас се производе и микро електро механички системи (MEMS). То су уређаји чија је карактеристична димензија мања од 1mm, а већа од 1 μ m, а који се састоје од електричних и механичких компоненти. Да би ови уређаји били направљени, многе области науке морале су да дају свој допринос. Развијени су нови материјали и начини њиховог испитивања, нове теорије у оквиру електронике, механике флуида и ситема управљања. На први поглед могло би се помислити да не постоји битна разлика између уређаја који су уобичајених димензија и уређаја чије се димензије мере у μ m. Међутим, мали системи се понашају другачије (Триммер и Строуд, 2002). Ако би просули воду из чаше карактеристичних димензија 5cm, вода би се разлила по столу, а затим сливала са њега. Ако би димензија чаше била 100 пута мања (0.5mm) површински напони би просуту воду формирали у капљицу која би се прилепила уз површину стола. Ако би још 100 пута смањили димензију чаше (0.5 μ m), при просипању би се највероватније десило да вода из чаше испари пре него што дође до површине стола. Очигледно је да у системима

малих димензија доминирају површински ефекти. Однос површине и запремине у машинама димензија 1 m је реда величине 1 m^{-1} , а код МЕМС-а чија је карактеристична димензија $1\text{ }\mu\text{m}$ тај однос је 10^6 m^{-1} тј. милион пута већи, што доводи до израженијих површинских ефеката. При прорачуну струјања флуида у микро системима јавља се клизање на зиду, термичко пузање и температурски скок.

Микро електро механички системи су нашли примену у разним гранама индустрије и медицине (Karniadakis, Beskok, 2002; Gad-El-Hak, 1999; Gad-El-Hak, 2002). Акцелерометри величине реда микрона користе се за активирање ваздушног јастука у аутомобилима. Мали сензори притиска се постављају на врху катетера помоћу којих се врше испитивања крвних судова. Микроактуатори покрећу електронски микроскоп којима се региструју поједини атоми. Микро размењивачи топлоте користе се за хлађење електронских кола. Микропумпе се уграђују у инк-јет штампаче. Огледи у биомедицини користе микропумпе и мрежу микроканала за анализу распрострањања лекова у организму. Један од првих примера феномена струјања флуида у микросистемима среће се у индустрији рачунара. У хард диску растојање између главе читача и писача и ротирајуће површине мери се у нанометрима. Смањењем тог растојања повећава се капацитет диска. Микро електро механички системи нашли су примену и у космичкој техници. НАСА је уочила потребу за развојем микросателита. Лансирањем неколико микросателита, при чему сваки носи по један инструмент, уместо једног сателита који носи низ уређаја, повећава се флексибилност мисије. Микросателити могу такође бити успешно коришћени за комуникационе системе у Земљиној орбити. Друге предности микросателита у односу на сателите уобичајених димензије су мања маса коју треба лансирати и повећање брзине лета.

1.1 СТРУЈАЊЕ ФЛУИДА У МИКРО СИСТЕМИМА

У микро електро механичким системима присутно је струјање флуида. Резултати експеримената који се односе на струјање флуида кроз микроканале указали су на извесна одступања у односу на аналитичка решења добијена коришћењем класичног начина решавања проблема у механици флуида, тј. применом теорије континуума. Да би се прецизно пројектовали микро електро механички системи наметнула се потреба за развојем модела којим би се тачно могло описати струјање флуида у микроканалима.

При струјању флуида кроз микроканале дужина слободног пута молекула није занемарљиво мала у односу на димензију канала, па је при прорачуну тих струјања потребно анализирати да ли је могуће користити једначине континуума. Дужина слободног пута молекула је средња вредност растојања коју молекули пређу између два узастопна судара. За идеалне гасове, код којих се сматра да молекули имају облик сфере, дужина слободног пута молекула зависи од притиска и температуре на следећи начин (Vinsenti, Kruger, 1986; Gad-El-Hak, 2002):

$$\lambda = \frac{kT}{p\sigma^2\pi\sqrt{2}} \quad (1.1)$$

где је $k = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K Болцманова (Boltzmann) константа, T температура гаса, p притисак, а σ пречник молекула. Однос дужине слободног пута молекула λ и карактеристичне димензије h представља Кнудсенов (Knudsen) број:

$$Kn = \frac{\lambda}{h} \quad (1.2)$$

На основу кинетичке теорије гасова следи веза између вискозности и дужине слободног пута молекула:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} = \frac{1}{2} \lambda \bar{c}_m \quad (1.3)$$

где је ν кинематска вискозност флуида, μ динамичка вискозност, ρ његова густина, а \bar{c}_m средња брзина молекула која се дефинише у односу на брзину звука c као:

$$\bar{c}_m = \sqrt{\frac{8}{\pi\kappa}} c \quad (1.4)$$

где $\kappa = c_p/c_v$ представља однос специфичних топлота.

Рејнолдсов (Reynolds) и Махов (Mach) број су

$$Re = \frac{uh}{\nu} \quad (1.5)$$

$$M = \frac{u}{c} \quad (1.6)$$

где u представља карактеристичну брзину флуида. Из једначина (1.1)-(1.6) следи релација која даје везу између Рејнолдсовог, Маховог и Кнудсеновог броја:

$$Kn = \sqrt{\frac{\pi \gamma}{2}} \frac{M}{Re} \quad (1.7)$$

Према томе Kn , M и Re број нису међусобно независни. Уколико су позната два, трећи је тачно дефинисан и следи из једначине (1.7).

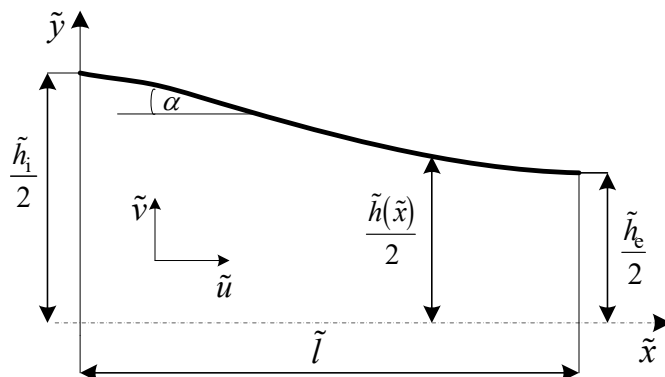
Струјање гасова код којих вредност Кнудсен-овог броја није занемарљиво мала ($Kn > 0.001$) третира се као струјање разређеног гаса. Ефекат разређености долази до изражаја при малим притисцима (опструјавање летилица на великим висинама или струјање гаса у вакуум-уређајима), али и у микроканалима у којима се струјање гаса одвија при стандардним вредностима притиска. Вредност Кнудсеновог броја одређује степен разређености. У зависности од Kn броја разликују се четири режима, међусобом различита по приступу у решавању проблема струјања флуида:

1. $Kn < 0.01$ - теорија континуума,
2. $0.001 < Kn < 0.1$ - струјање са клизањем,
3. $0.1 < Kn < 10$ - прелазна област,
4. $Kn > 10$ - кинетичка теорија гасова.

Коришћењем Болцманове једначине, која представља функцију расподеле брзина молекула у времену и простору, могу се добити решења за све поменуте режиме (Vinsenti, Kruger, 1986; Tien, Lienhard, 1971; Schaaf, Chambre, 1958; Schaaf, 1963). Функција расподеле одређује број молекула чије се брзине налазе у одређеном малом опсегу у посматраној запремини у једном тренутку времена. До промене у броју молекула који се крећу брзином u_c у некој посматраној елементарној запремини долази услед судара молекула унутар те запремине при чему неки од њих престају да се крећу посматраном брзином, а неки је након судара добијају, и услед пролаза молекула кроз површину посматране контролне запремине. Ако је посматрана елементарна запремина гаса у равнотежи то значи да се број молекула у њој који се крећу у малом опсегу око неке брзине не мења у току

2. СТРУЈАЊЕ ГАСА У МИКРОКАНАЛИМА

У овом поглављу анализирано је дводимензијско изотермско стишљиво струјање гаса у микроканалима променљивог попречног пресека (слика 2.1).



Слика 2.1 Микроканал променљивог попречног пресека.

Оба зида микроканала су непокретна, а струјање гаса се дешава захваљујући разлици притиска на улазу и излазу канала. Анализирана су дозвучна струјања у режиму клизања. Једначине одржања масе, количине кретања и једначина стања којима се описује ово струјање су:

$$\frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{u})}{\partial\tilde{x}} + \frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{v})}{\partial\tilde{y}} = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{u}^2)}{\partial\tilde{x}} + \frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{v})}{\partial\tilde{y}} = -\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{x}} + \frac{\partial\tilde{\tau}_{xx}}{\partial\tilde{x}} + \frac{\partial\tilde{\tau}_{yx}}{\partial\tilde{y}} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{u}\tilde{v})}{\partial\tilde{x}} + \frac{\partial(\tilde{\rho}\tilde{v}^2)}{\partial\tilde{y}} = -\frac{\partial\tilde{p}}{\partial\tilde{y}} + \frac{\partial\tilde{\tau}_{xy}}{\partial\tilde{x}} + \frac{\partial\tilde{\tau}_{yy}}{\partial\tilde{y}} \quad (2.3)$$

$$\tilde{p} = \tilde{\rho}R\tilde{T} \quad (2.4)$$

где је $\tilde{\rho}$ густина, \tilde{p} притисак, \tilde{u} и \tilde{v} подужна и попречна компонента брзине, а $\tilde{\tau}_{ji}$ напон услед вискозности. Напон услед вискозности се дефинише зависно од степена одступања режима струјања од услова континуума и граничних услова на зиду канала. У случају већих вредности Кнудсеновог броја (прелазна област), неопходна је примена граничних услова другог реда, тј. граничних услова тачности реда Kn^2 . Гранични услови другог реда могу се применити и у области струјања са клизањем чиме се постиже већа тачност решења. Коришћење граничних услова тачности реда Kn^2 подразумева коришћење и једначина другог реда за дефинисање напона услед вискозности тј. одговарајућих једначина одржања количине кретања. То су Барнетове једначине (Vinsenti и Kruger, 1986; Schaaf и Chambre, 1958; Schaff, 1963; Beskok и Karniadakis, 1999) које произилазе из Болцманове једначине коришћењем развоја у ред Чапман-Енског по Kn броју функције расподеле брзина f : $f = f_0 + Kn f_1 + Kn^2 f_2$. f_0 је Максвелова равнотежна функција расподеле или решење нултог реда које одговара равнотежном стању флуида када напони услед вискозности не постоје. У том случају Болцманова једначина се своди на Ојлерову. Решење тачности првог реда тј. $O(Kn)$ су Навије-Стоксове једначине, а решење другог реда тј. $O(Kn^2)$ Барнетове једначине. Једначине (2.2) и (2.3) су Барнетове ако је напон услед вискозности дефинисан као (Beskok и Karniadakis, 1999):

$$\begin{aligned} \tilde{\tau}_{ij} = & 2\tilde{\mu} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j} - \frac{\tilde{\mu}^2}{\tilde{p}} \left[\omega_1 \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \tilde{x}_k} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j} + \omega_2 \left(\frac{D}{Dt} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j} - 2 \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_k} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \tilde{x}_j} \right) + \omega_3 R \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}_i \partial \tilde{x}_j} + \right. \\ & \left. + \omega_3 R \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}_i \partial \tilde{x}_j} + \omega_4 \frac{1}{\tilde{\rho} \tilde{T}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}_i} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}_j} + \omega_5 \frac{R}{\tilde{T}} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}_i} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}_j} + \omega_6 \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_k} \frac{\partial \tilde{u}_k}{\partial \tilde{x}_j} \right] \end{aligned} \quad (2.5)$$

Црта изнад тензора има следеће значење:

$$\overline{f_{ij}} = (f_{ij} + f_{ji})/2 - \delta_{ij}/3 f_{mm} \quad (2.6)$$

Коефицијент ω_i зависи од врсте гаса. Под претпоставком да се гас може описати Максвеловим моделом (сила при судару молекула је обрнуто пропорционална са петим степеном растојања између њихових центара (Vinsenti и Kruger, 1986)), вредности ових коефицијената за услове

3.2 СТРУЈАЊЕ ГАСА У МИКРОЛЕЖАЈУ СА ПОРОЗНИМ ЗИДОМ ПРИ ВЕЛИКИМ ВРЕДНОСТИМА РЕЈНОЛДСОВОГ БРОЈА

На основу анализе дате у поглављу 2, параметри m и n изабрани су тако да се у другој апроксимацији осим ефекта клизања на зиду јави и утицај инерције: $m = n = 2/3$. Притисак и брзина се у овом случају дефинишу у облику следећих редова:

$$p = p_0 + \varepsilon^{2/3} p_{2/3} \quad (3.31)$$

$$u = u_0 + \varepsilon^{2/3} u_{2/3} \quad (3.32)$$

$$V = V_0 + \varepsilon^{2/3} V_{2/3} \quad (3.33)$$

Увођењем ових редова којима су претпостављена решења за притисак и брзину у основне једначине (2.19)-(2.22) и (3.12), и граничне услове (3.13) и (3.14), добијају се системи једначина за прве две апроксимације:

- $O(1)$:

$$\frac{\partial(p_0 u_0)}{\partial \xi} + \frac{\partial(p_0 V_0)}{\partial y} = 0 \quad (3.34a)$$

$$\frac{\partial p_0}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \quad (3.34b)$$

$$y = 0: u_0 = 1, \quad V_0 = 0 \quad (3.34b)$$

$$y = h(\xi): u_0 = 0, \quad V_0 = V_{i0} = \frac{D}{(b-h)} \frac{(p_0^2 - p_a^2)}{p_0} \quad (3.34r)$$

- $O(\varepsilon^{2/3})$:

$$\frac{\partial(p_0 u_{2/3} + p_{2/3} u_0)}{\partial \xi} + \frac{\partial(p_0 V_{2/3} + p_{2/3} V_0)}{\partial y} = 0 \quad (3.35a)$$

$$\beta p_0 \left[u_0 \frac{\partial u_0}{\partial \xi} + V_0 \frac{\partial u_0}{\partial y} \right] = -\frac{\partial p_{2/3}}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 u_{2/3}}{\partial y^2} \quad (3.35б)$$

$$y=0: \quad u_{2/3} = \frac{2-\sigma_{v1}}{\sigma_{v1}} \frac{\eta}{p_0} \frac{\partial u_0}{\partial y}, \quad V_0 = 0 \quad (3.35в)$$

$$y=h(\xi): \quad u_{2/3} = -\frac{2-\sigma_{v2}}{\sigma_{v2}} \frac{\eta}{p_0} \frac{\partial u_0}{\partial y}$$

$$V_{2/3} = u_{2/3} \frac{dh}{d\xi} + V_{i2/3} = u_{2/3} \frac{dh}{d\xi} + \frac{D}{(b-h)} p_{2/3} \left(1 + \frac{p_a^2}{p_0^2} \right) \quad (3.35г)$$

На исти начин као и у случају $Re \ll 1$ поступним решавањем система једначина (3.34a), (3.34б), (3.35a) и (3.35б) и коришћењем одговарајућих граничних услова (3.34в), (3.34г), (3.35в) и (3.35г), добијају се диференцијалне једначине за притисак и брзину:

- прва апроксимација:

$$u_0 = 1 - \frac{y}{h} \left(1 + p'_0 \frac{h^2}{2\xi_l} \right) + p'_0 \frac{y^2}{2\xi_l} \quad (3.36)$$

$$\left[h^3 (p_0 p'_0) \right]' - 6\xi_l (p_0 h)' - 12\xi_l^2 p_0 V_{i0} = 0 \quad (3.37)$$

- друга апроксимација:

$$u_{2/3} = \left(\frac{2-\sigma_{v1}}{\sigma_{v1}} + \frac{2-\sigma_{v2}}{\sigma_{v2}} \right) \frac{\eta}{p_0 h^2} y + \left(\frac{2-\sigma_{v1}}{\sigma_{v1}} - \frac{2-\sigma_{v2}}{\sigma_{v2}} \right) \frac{\eta p'_0}{2 p_0 \xi_l} y -$$

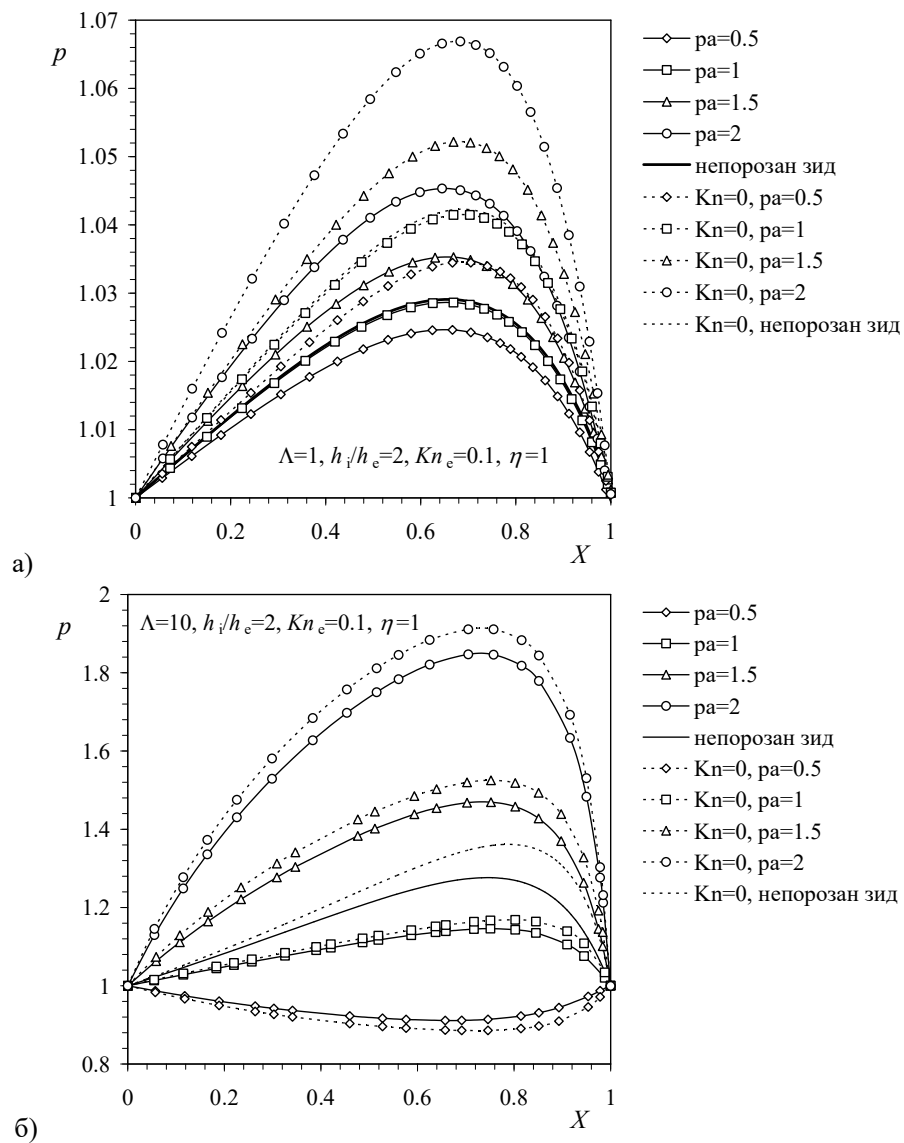
$$- \frac{2-\sigma_{v1}}{\sigma_{v1}} \frac{\eta}{p_0} \left(\frac{p'_0 h}{2\xi_l} + \frac{1}{h} \right) + \frac{p'_{2/3} h^2}{2\xi_l} \left(\frac{y^2}{h^2} - \frac{y}{h} \right) +$$

$$+ \beta \left\{ A \frac{h^3}{6} \left(\frac{y^3}{h^3} - \frac{y}{h} \right) + B \frac{h^4}{24} \left(\frac{y^4}{h^4} - \frac{y}{h} \right) - C \frac{h^5}{60} \left(\frac{y^5}{h^5} - \frac{y}{h} \right) + E \frac{h^6}{360} \left(\frac{y^6}{h^6} - \frac{y}{h} \right) \right\} \quad (3.38)$$

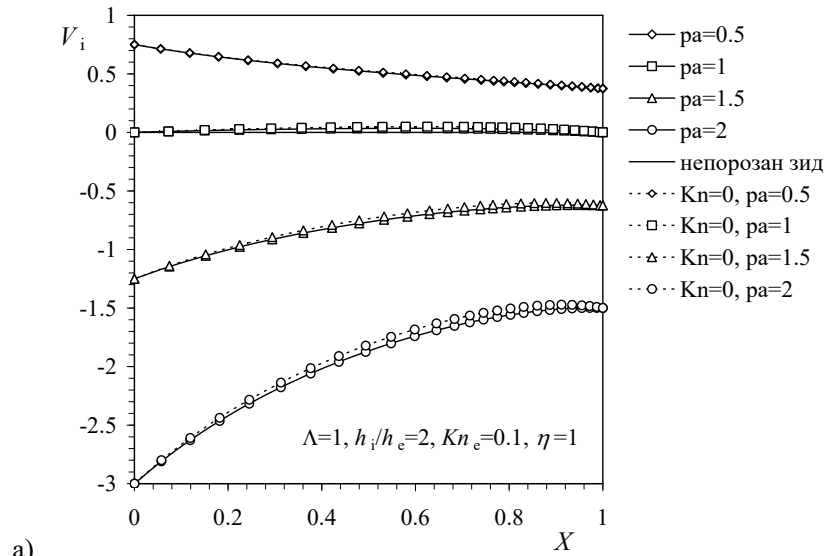
где су:

$$\begin{aligned}
A &= \frac{(p_0 h)'}{\xi_l h^2} - \frac{p_0^2}{2\xi_l^2} \left(\frac{p_0' h}{p_0} \right)' \\
B &= \frac{p_0^2 p_0' h}{4\xi_l^3} \left(\frac{p_0' h}{p_0} \right)' - \frac{(p_0 h)'}{\xi_l h^3} + \frac{3p_0^3}{2\xi_l^2} \left(\frac{p_0'}{p_0} \right)' \\
C &= \frac{p_0^3}{\xi_l^2} \left(\frac{p_0'}{p_0} \right)' \left(\frac{p_0' h}{2\xi_l} + \frac{1}{h} \right) \\
E &= \frac{p_0^3 p_0'}{\xi_l^3} \left(\frac{p_0'}{p_0} \right)' \\
\left[\frac{h^3}{12} (p_0 p_{2/3})' \right]' - \xi_l \frac{(p_{2/3} h)'}{2} - 2\xi_l^2 p_0 p_{2/3} \frac{D}{(b-h)} &= -\frac{2-\sigma_{v1}}{\sigma_{v1}} \eta \left(\frac{p_0' h^2}{2} \right)' + \\
+ \left(\frac{2-\sigma_{v1}}{\sigma_{v1}} - \frac{2-\sigma_{v2}}{\sigma_{v2}} \right) \eta \left(\frac{p_0' h^2}{2} \right)' - \beta \xi_l p_0' \left(\frac{Ah^4}{24} + \frac{Bh^5}{80} - \frac{Ch^6}{180} + \frac{Eh^7}{1008} \right) - \\
- \beta \xi_l p_0 \left(\frac{A'h^4}{24} + \frac{B'h^5}{80} - \frac{C'h^6}{180} + \frac{E'h^7}{1008} \right) - \\
- \beta \xi_l p_0 \left(\frac{Ah^3 h'}{6} + \frac{Bh^4 h'}{16} - \frac{Ch^5 h'}{30} + \frac{Eh^6 h'}{144} \right) & \quad (3.39)
\end{aligned}$$

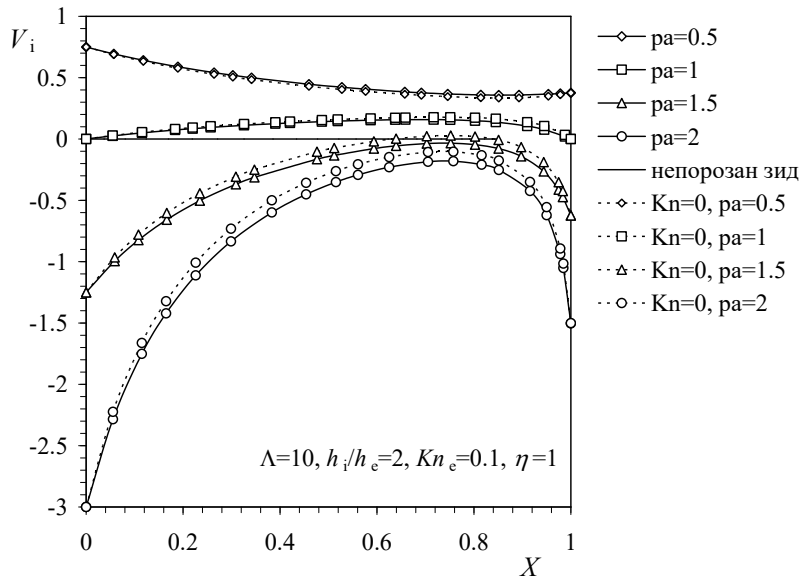
где прим има значење d/dX , а h је закон промене попречног пресека канала изражен у функцији од координате X . Знајући притисак у улазном тј. излазном пресеку, који је у потпуности саржан у првој апроксимацији ($X=0, p=p_0=1, p_{2/3}=0$ и $X=1, p=p_0=1, p_{2/3}=0$), нумеричким решавањем система диференцијалних једначина (3.37) и (3.39), добија се решење за промену бездимензионог притиска дуж микролежаја. При томе се као и у случају малих Рејнолдсових бројева користе познати почетни услови за p_0 и $p_{2/3}$ и предпостављају вредности за њихове прве изводе у улазном пресеку при којима се добијају задате вредности прве и друге апроксимације притиска у излазном пресеку. Након тога може се одредити и профил брзине



Слика 3.6 Распредела притиска дуж микролежаја са порозним зидом ($D=1, b=3$) за различите притиске p_a и за класичан микролежај без порозног зида, при великим вредностима Рејнолдсовог броја: а) $\Lambda=1$, б) $\Lambda=10$.

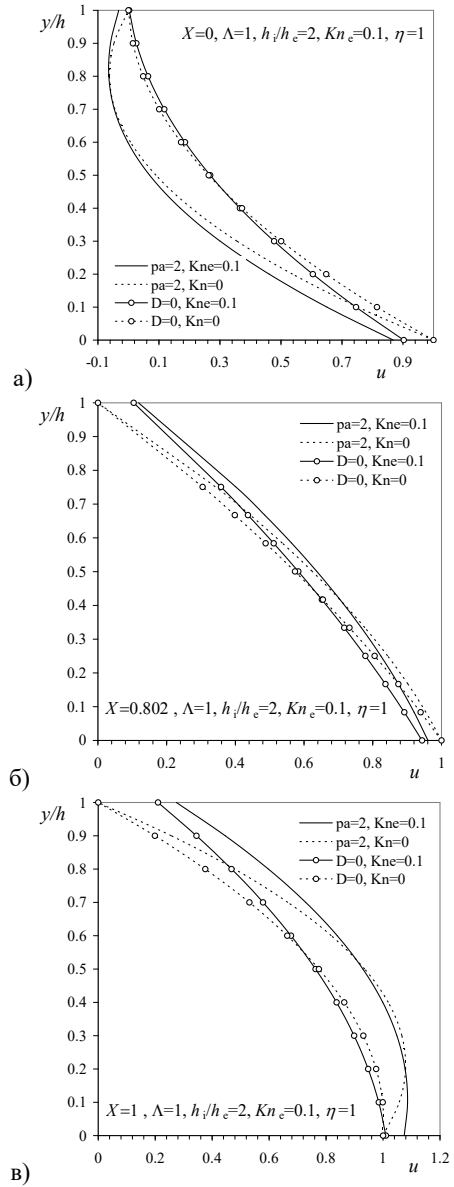


a)

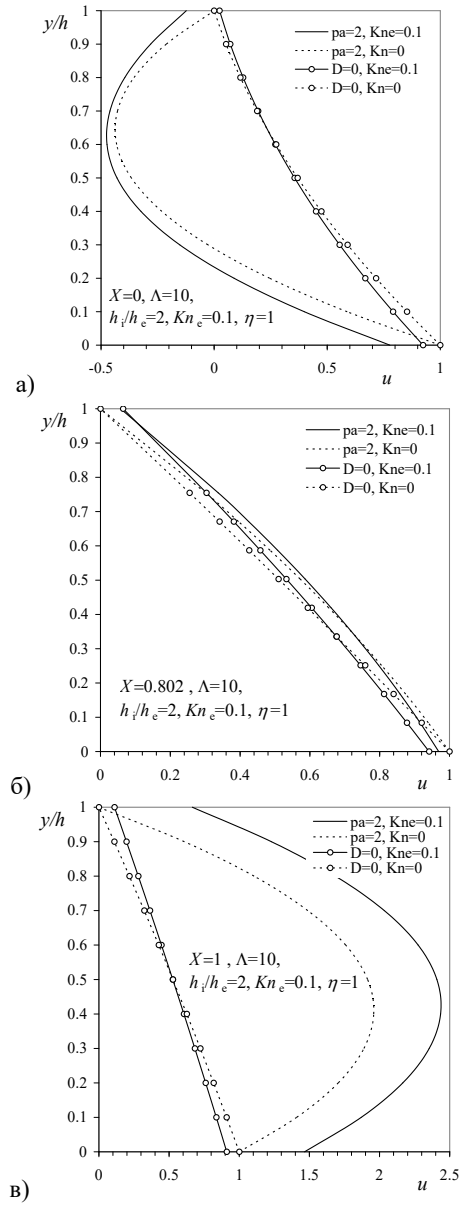


б)

Слика 3.7 Расподела брзине убризгавања и усисавања гаса кроз горњи порозни зид у микролежају са порозним зидом ($D=1$, $b=3$) за различите притиске p_a , при великим вредностима Рејнолдсовог броја: а) $\Lambda=1$, б) $\Lambda=10$.



Слика 3.8. Профили брзине у различитим попречним пресецима при струјању гаса кроз микрорежај са порозним зидом ($D=1$, $b=3$) за $p_a=2$ и кроз микрорежај без порозног зида, при великим вредностима Re броја, за $\Lambda=1$: а) $X=0$, б) $X=0.805$, в) $X=1$.



Слика 3.9. Профили брзине у различитим попречним пресецима при струјању гаса кроз микрорежај са порозним зидом ($D=1$, $b=3$) за $p_a=2$ и кроз микрорежај без порозног зида, при великим вредностима Re броја, за $\Lambda=10$: а) $X=0$, б) $X=0.805$, в) $X=1$.

у произвољном попречном пресеку и промена брзине убризгавања гаса дуж микролежаја.

За микролежај код ког је промена попречног пресека линеарна и дефинисана релацијом (3.29), при чему је однос висине улазног и излазног пресека $h_i = 2$, дата је расподела притиска, брзине убризгавања или усисавања и подужне брзине у микроканалу. Сви резултати добијени су за $Kn_e = 0.1$, $\eta = 1$, $D = 1$, $b = 3$, $\sigma_v = 1$, а за две вредности карактеристике лежаја: $\Lambda = 1$ и $\Lambda = 10$. На сликама 3.6 и 3.7 приказана је расподела притиска и брзина убризгавања дуж микролежаја за различите вредности притиска у комори изнад порозног зида. Утицај овог притиска, као и утицај ефекта клизања на зиду исти су као и у случају струјања гаса при малим вредностима Рејнолдсовог броја. Притисак p_a већи од притиска p_i доводи до повећања притиска у микролежају и његове веће носивости, а на слици 3.7 се види да тада долази до убризгавања гаса у микролежај. Услов клизања на зиду има супротан утицај, тј. доводи до мањег притиска у микролежају и мање брзине убризгавања.

3.3 СТРУЈАЊЕ ГАСА У МИКРОЛЕЖАЈУ БЕЗ ПОРОЗНОГ ЗИДА

У овом поглављу приказана су решења која се односе на струјање гаса кроз класичан микролежај без порозног зида (Stevanovic, 2009). Из решења датих у поглављима 3.1 и 3.2, која се односе на струјање гаса кроз микролежај са порозним зидом такође се, за $D = 0$ налази из једначина (3.24)-(3.27) и (3.36)-(3.39) решење за притисак и брзину у микролежају без порозног зида. Међутим, у овом поглављу ће за режим струјања при малим вредностима Рејнолдсовог броја бити дато решење веће тачности, тј. осим решења за p_0 , $p_{1/4}$, u_0 и $u_{1/4}$ добијено је решење и за $p_{1/2}$, $p_{3/4}$, $u_{1/2}$ и $u_{3/4}$. Налажење решења вишег реда тачности захтевало је и граничне услове вишег реда, а тако и одговарајућу једначину количине кретања – Барнетову једначину. Како су услови струјања исти као и у већ анализираном случају струјања гаса кроз микроканале (поглавље 2), и у овом случају Барнетове једначоне своде се на Навије-Стоксове једначине (2.19)-(2.22). Такође, и овде су коришћени гранични услови другог реда Хсиа-Домота (Hsia и Domoto, 1983):

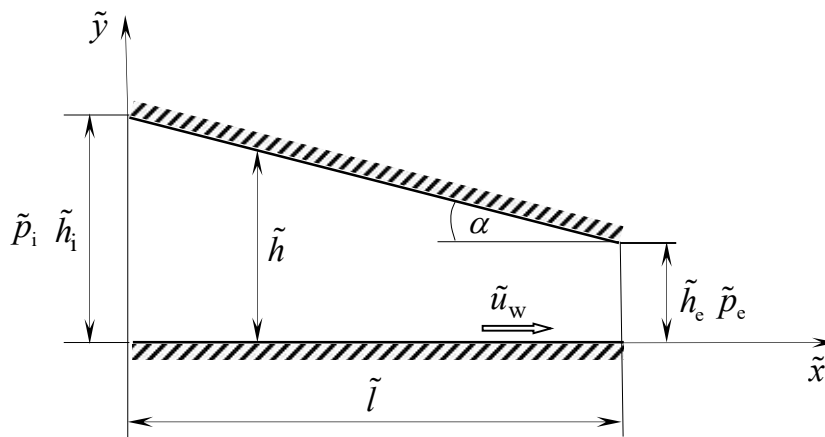
4. АНАЛИТИЧКО РЕШЕЊЕ ЗА СТРУЈАЊЕ ГАСА У МИКРОЛЕЖАЈУ

У овом поглављу дато је тачно аналитичко решење за прорачун стишљивог димензијског струјања разређеног гаса у микролежајима (слика 4.1). Претпостављено је да је Рејнолдсов број при струјању гаса у лежајима мали, па је утицај инерције занемарен. Добијено аналитичко решење омогућава одређивање расподеле притиска, тј. носивости микролежаја. Ово решење обухвата и струјање гаса кроз лежај класичних димензија када клизање на зиду не долази до изражаја. Тако је, полазећи од сложенијег модела који узима у обзир утицај клизања на зиду, добијено аналитичко решење Рајнолдсове једначине подмазивања, која је позната у литератури и односи се на класичан лежај, а која до сада није аналитички решена.

Једначина континуитета и количине кретања која описује ово струјање је:

$$\dot{m} = \int_0^{\tilde{h}} \tilde{\rho} \tilde{u} d\tilde{y} \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} = \frac{1}{\tilde{\mu}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} \quad (4.2)$$



Слика 4.1 Геометрија микролежаја

У циљу веће тачности решења која се односе на област струјања са клизањем као и проширења примене добијеног решења на прелазну област, користе се гранични услови другог реда:

$$\tilde{y} = 0: \quad \tilde{u} = \tilde{u}_0 = \tilde{u}_w + A_1 \tilde{\lambda} \left. \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right|_{\tilde{y}=0} - A_2 \tilde{\lambda}^2 \left. \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right|_{\tilde{y}=0} \quad (4.3)$$

$$\tilde{y} = \tilde{h}(\tilde{x}): \quad \tilde{u} = \tilde{u}_1 = -A_1 \tilde{\lambda} \left. \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \tilde{y}} \right|_{\tilde{y}=\tilde{h}} - A_2 \tilde{\lambda}^2 \left. \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial \tilde{y}^2} \right|_{\tilde{y}=\tilde{h}} \quad (4.4)$$

У литератури постоји низ понуђених приступа различитих аутора за одређивање вредности коефицијената A_1 и A_2 . Неки од њих дати су у табели 1.1. Израз за поље брзине у микролежају следи из једначине количине кретања (4.2) и граничних услова (4.3) и (4.4)

$$\tilde{u} = \frac{\tilde{h}^2}{2\tilde{\mu}} \frac{d\tilde{p}}{d\tilde{x}} \frac{\tilde{y}^2}{\tilde{h}^2} - \left(\tilde{u}_0 - \tilde{u}_1 + \frac{\tilde{h}^2}{2\tilde{\mu}} \frac{d\tilde{p}}{d\tilde{x}} \right) \frac{\tilde{y}}{\tilde{h}} + \tilde{u}_0 \quad (4.5)$$

где је $\tilde{h} = \tilde{h}(\tilde{x})$, $\tilde{u}_0 = \tilde{u}_0(\tilde{x})$ и $\tilde{u}_1 = \tilde{u}_1(\tilde{x})$.

Како је струјање изотермско густина зависи само од притиска, тј. $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}(\tilde{x})$, па је једначина континуитета:

$$\dot{m} = \tilde{\rho}(\tilde{x}) \tilde{h}(\tilde{x}) \int_0^1 \tilde{u}(\eta) d\eta \quad (4.6)$$

где је $\eta = \tilde{y}/\tilde{h}(\tilde{x})$. Увођењем решења за брзину (4.5) у једначину континуитета (4.6) налази се једначина за промену притиска дуж микроканала:

$$\dot{m} = \frac{\tilde{p}\tilde{h}}{2RT} \left(\tilde{u}_0 + \tilde{u}_1 - \frac{\tilde{h}^2}{6\tilde{\mu}} \frac{d\tilde{p}}{d\tilde{x}} \right) \quad (4.7)$$

Како је $\frac{d\tilde{p}}{d\tilde{x}} = \frac{d\tilde{p}}{d\tilde{h}} \frac{d\tilde{h}}{d\tilde{x}}$ једначина за притисак $\tilde{p} = \tilde{p}(\tilde{h})$ је

$$-\frac{1}{12\tilde{\mu}R\tilde{T}}\tilde{h}^3\tilde{p}\frac{d\tilde{p}}{d\tilde{h}}\frac{d\tilde{h}}{d\tilde{x}} + \frac{\tilde{u}_0 + \tilde{u}_1}{2R\tilde{T}}\tilde{h}\tilde{p} = \dot{\tilde{m}} \quad (4.8)$$

Коришћењем следећих размера: висине лежаја на излазу \tilde{h}_e за висину, дужине лежаја \tilde{l} за подужну координату x , брзине покретног зида \tilde{u}_w за брзину, притиска на излазу тј. улазу $\tilde{p}_e = \tilde{p}_i$ за притисак, дефинишу се бездимензијске величине $h = \tilde{h}/\tilde{h}_e$, $x = \tilde{x}/\tilde{l}$, $u = \tilde{u}/\tilde{u}_w$, $p = \tilde{p}/\tilde{p}_e$, а једначина (4.8) у бездимензијском облику је

$$-\frac{h^3 p}{\Lambda} \frac{dp}{dh} \frac{dh}{dx} + (u_0 + u_1)hp = m \quad (4.9)$$

где је $\Lambda = \frac{6\tilde{\mu}\tilde{u}_w\tilde{l}}{\tilde{p}_e\tilde{h}_e^2}$ карактеристика лежаја, а $m = \frac{\dot{\tilde{m}}}{\dot{\tilde{m}}_C}$, при чему је

$\dot{\tilde{m}}_C = \frac{\tilde{u}_w\tilde{p}_e\tilde{h}_e}{2R\tilde{T}}$ Куетов део масеног протока у излазном пресеку.

Увођењем променљиве

$$z = \frac{1}{ph} \quad (4.10)$$

две променљиве које зависе од координате x замењене су једном. При томе је закон промене висине лежаја унапред познат. Како је

$$\frac{dz}{dh} = -\frac{1}{ph^2} - \frac{1}{p^2h} \frac{dp}{dh} \quad (4.11)$$

Једначина (4.9) трансформисана у нови облик где је уместо притиска p уведена променљива z је:

$$\frac{dh}{dx} \frac{1}{\Lambda} \left(h \frac{dz}{dh} + z \right) + (u_0 + u_1)z^2 = mz^3 \quad (4.12)$$

Из граничних услова (4.3), (4.4) и решења за брзину (4.5), следи да је збир брзина гаса на доњем и горњем зиду у бездимензијском облику:

$$u_0 + u_1 = 1 - \frac{dh}{dx} \frac{6}{\Lambda} h^2 \frac{dp}{dh} (A_1 Kn + 2A_2 Kn^2) \quad (4.13)$$

Узимајући у обзир везу између локалне вредности Кнудсеновог броја $Kn = \tilde{\lambda}/\tilde{h}$ и референтне вредности $Kn_e = \tilde{\lambda}_e/\tilde{h}_e$

$$\frac{Kn}{Kn_e} = \frac{1}{ph} = z \quad (4.14)$$

једначина (4.12) трансформише се у

$$\frac{dh}{dx} \frac{1}{\Lambda} \left(h \frac{dz}{dh} + z \right) [1 + 6Kn_e z (A_1 + A_2 Kn_e z)] = z^2 (1 - mz) \quad (4.15)$$

Одговарајући гранични услови за ову диференцијалну једначину су:

$$x = 0: \quad h = h_1, z = 1/h_1 \quad (4.16)$$

$$x = 1: \quad h = 1, z = 1 \quad (4.17)$$

Ако се промена висине лежаја дефинише линеарним законом

$$h = h_1 - (h_1 - 1)x \quad (4.18)$$

и уочи да израз у другој загради леве стране једначине (4.15) зависи само од $Kn_e z$ без обзира на коришћени модел граничног услова, тј. $1 + 6Kn_e z (A_1 + A_2 Kn_e z) = 1 + F(Kn_e z)$, једначина (4.15) може се написати као:

$$\frac{h_1 - 1}{\Lambda} \left(h \frac{dz}{dh} + z \right) = \frac{z^2 (1 - mz)}{1 + F(Kn_e z)} \quad (4.19)$$

Раздвајањем променљивих и налажењем интеграла у границама од произвољног пресека у микролежају до излаза следи

$$\int_h^1 \frac{dh}{h} = \int_z^1 \frac{[1 + F(Kn_e z)] dz}{z \frac{\Lambda}{h_i - 1} z^2 (1 - mz) - z [1 + F(Kn_e z)]} \quad (4.20)$$

Решење овог интеграла представља решење за поље притиска у микролежају, а у посебном случају када је $Kn_e = 0$ решење за класичан лежај. Након замене функције $F = (Kn_e z)$ у (4.20) следи

$$\int_h^1 \frac{dh}{h} = \int_z^1 \frac{1 + 6Kn_e A_1 z + 12Kn_e^2 A_2 z^2}{z \left[1 + z \left(\underbrace{6Kn_e - \frac{\Lambda}{h_i - 1}}_{C_1} \right) + z^2 \left(\underbrace{12Kn_e^2 A_2 + \frac{m\Lambda}{h_i - 1}}_{C_2} \right) \right]} dz \quad (4.21)$$

Интеграл има два решења, једно када је вредност $\delta = C_1^2 - 4C_2$ негативна и друго за позитивну вредност δ .

- $\delta < 0$

$$\begin{aligned} \ln h = & -\ln z - \frac{m\Lambda}{2C_2(h_i - 1)} \ln \left(\frac{C_2 + C_1 + 1}{C_2 z^2 + C_1 z + 1} \right) + \\ & + \frac{2\Lambda}{(h_i - 1)} \left(1 + \frac{mC_1}{2C_2} \right) \frac{1}{\sqrt{4C_2 - C_1^2}} \operatorname{arctg} \frac{(1 - z)\sqrt{4C_2 - C_1^2}}{2(1 + C_2 z) + C_1(1 + z)} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Коефицијент m се налази из добијеног решења коришћењем првог граничног услова: $h = h_i, z = 1/h_i$:

$$m = \frac{4C_2 + 2mC_1}{\sqrt{4C_2 - C_1^2}} \frac{1}{\ln \frac{C_2 + C_1 + 1}{\frac{C_2}{h_i^2} + \frac{C_1}{h_i} + 1}} \operatorname{arctg} \frac{(h_i - 1)\sqrt{4C_2 - C_1^2}}{2(h_i + C_2) + C_1(h_i + 1)} \quad (4.23)$$

Како се m не може експлицитно изразити, вредност овог коефицијента се налази итеративном путем.

- $\delta > 0$

$$\ln h = -\ln z - \frac{m\Lambda}{2C_2(h_1-1)} \ln \left(\frac{C_2 + C_1 + 1}{C_2 z^2 + C_1 z + 1} \right) + \frac{\Lambda}{(h_1-1)} \left(1 + \frac{mC_1}{2C_2} \right) \frac{1}{\sqrt{C_1^2 - 4C_2}} \cdot \frac{\left(2C_2 + C_1 - \sqrt{C_1^2 - 4C_2} \right) \left(2C_2 z + C_1 + \sqrt{C_1^2 - 4C_2} \right)}{\left(2C_2 + C_1 + \sqrt{C_1^2 - 4C_2} \right) \left(2C_2 z + C_1 - \sqrt{C_1^2 - 4C_2} \right)} \quad (4.24)$$

Сада се коефицијент m налази из овог решења на исти начин као и у предходном случају коришћењем првог граничног услова: $h = h_1, z = 1/h_1$:

$$m = \left(1 + \frac{mC_1}{2C_2} \right) \frac{2C_2}{\sqrt{C_1^2 - 4C_2}} \frac{1}{\ln \left(\frac{h_1^2 (C_2 + C_1 + 1)}{C_2 + h_1 C + h_1^2} \right)} \cdot \frac{\left(2C_2 + C_1 - \sqrt{C_1^2 - 4C_2} \right) \left(2 \frac{C_2}{h_1} + C_1 + \sqrt{C_1^2 - 4C_2} \right)}{\left(2C_2 + C_1 + \sqrt{C_1^2 - 4C_2} \right) \left(2 \frac{C_2}{h_1} + C_1 - \sqrt{C_1^2 - 4C_2} \right)} \quad (4.25)$$

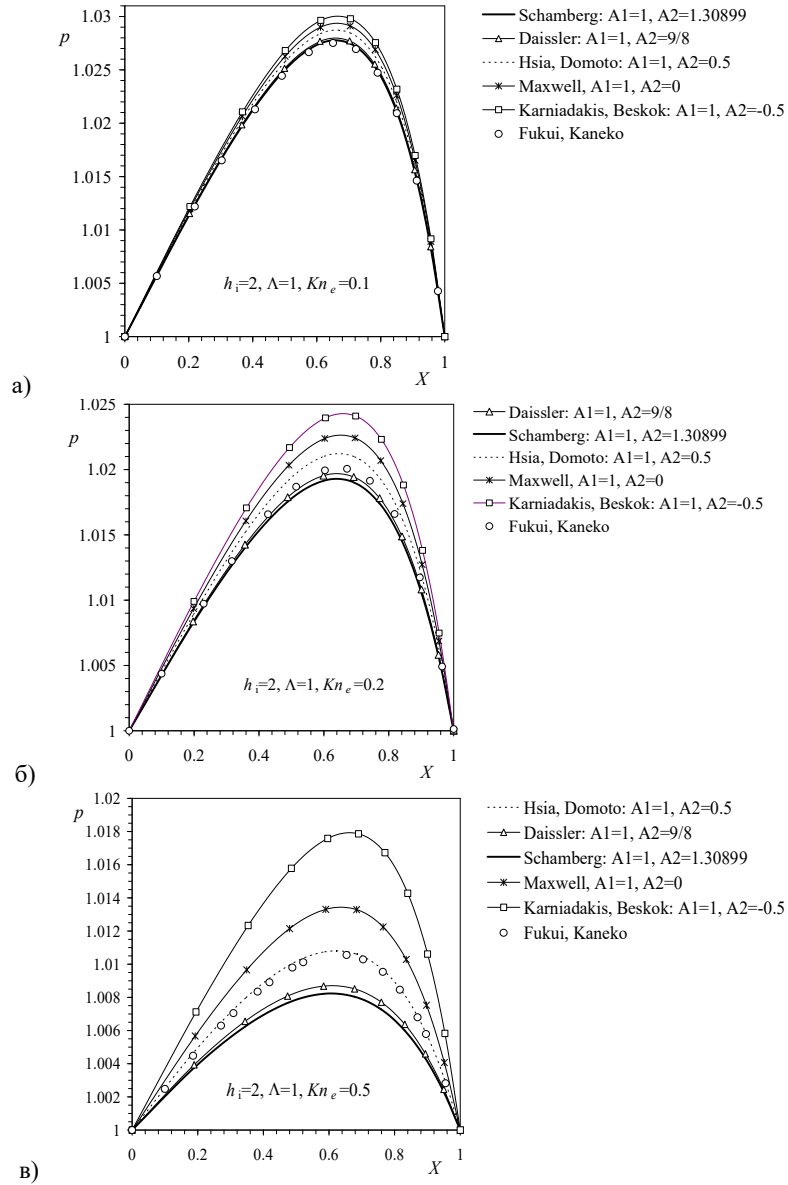
За познату вредност карактеристике лежаја Λ , однос улазне и излазне висине лежаја h_1 , Кнудсенов број у излазном пресеку Kn_e као и вредност коефицијената A_1 и A_2 изабраног граничног услова, претпостави се почетна вредност коефицијента m . Итеративним путем, водећи рачуна да ли је δ позитивно или негативно одређује се m из израза (4.23) или (4.25). Сада је на основу једначина (4.22) и (4.24) потпуно дефинисана веза између променљивих z и h . Како није могуће из ових једначина експлицитно изразити z , а из граничних услова је познато да се вредност променљиве z мења од улазног пресека $z = 1/h_1$ до излазног $z = 1$, за задату вредност z која је у овом опсегу из једначина (4.22) и (4.24) налази се одговарајућа вредност h . На крају, израчунава се и притисак из релације $z = \frac{1}{hp}$.

На сликама 4.2, 4.3, 4.4 приказана је расподела притиска у микроканалу чија је промена попречног пресека дефинисана линеарним законом (4.18) када је однос висине микроканала на улазу и излазу $h_1 = 2$. Резултати су добијени за три вредности карактеристике микролежаја ($\Lambda = 1, \Lambda = 10$ и

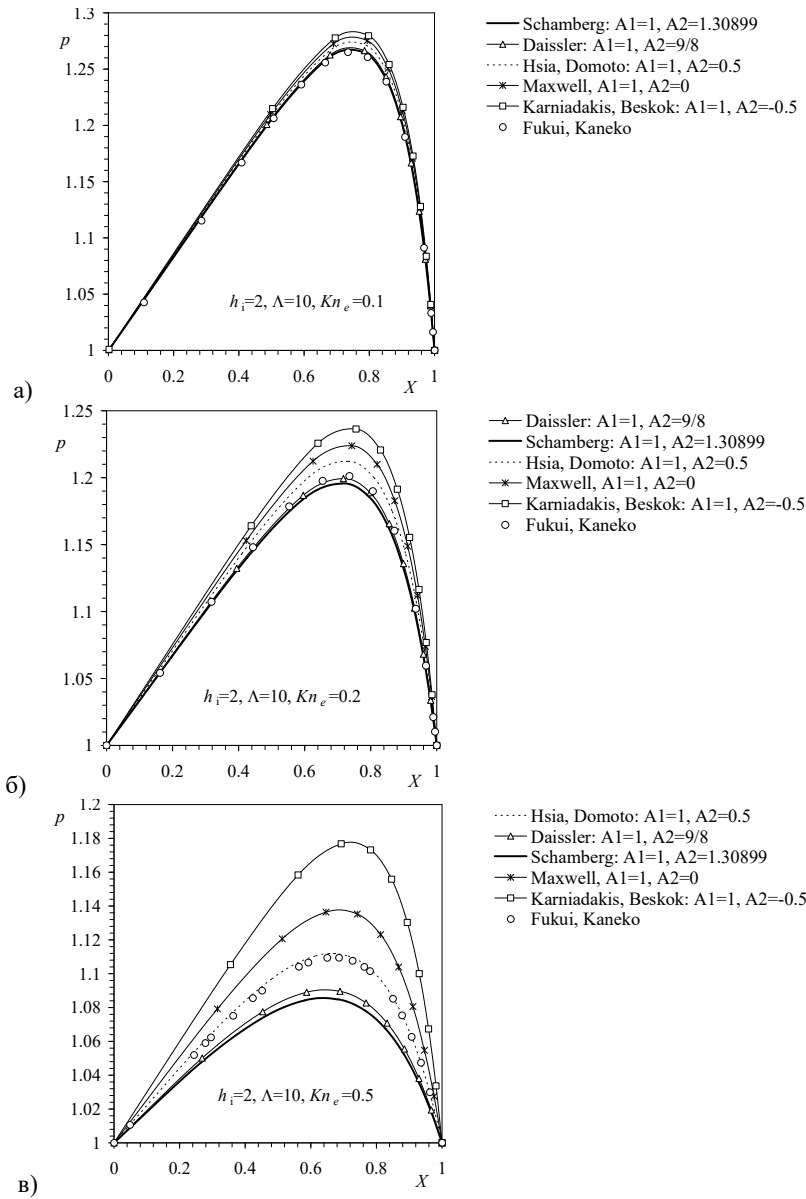
$\Lambda = 100$), као и за три вредности референтног Кнудсеновог броја ($Kn_e = 0.1$, $Kn_e = 0.2$ и $Kn_e = 0.5$). Примена граничних услова другог реда даје могућност примене добијеног решења на део прелазне области, па су у циљу испитивања границе примене добијена решења и за релативно веће вредности Кнудсеновог броја које припадају прелазној област ($Kn_e = 0.2$ и $Kn_e = 0.5$). Уочава се да гранични услов Шамберга (Schamberg, 1947) даје најбоље слагање са нумеричким решењем Болцманове једначине (Fukui и Kaneko, 1988; 1990) за област клизања ($Kn_e = 0.1$), док је за почетак прелазне области ($Kn_e = 0.2$) најпогодније користити Дајслеров гранични услов (Deissler, 1964). Показано је да ово аналитичко решење може да се примени и на веће вредности Кнудсеновог броја ($Kn_e = 0.5$) и да тада највећу тачност обезбеђује гранични услов Хсиа–Домота (Hsia и Domoto, 1983). Ова три гранична услова дају решења задовољавајуће тачности за све приказане случајеве. Кроз решења приказана на сликама 4.2, 4.3 и 4.4 показује се да у литератури оспораван гранични услов Бескока и Карниадакиса заиста доводи до решења које одступа од нумеричког решења Болцманове једначине, што указује на нетачност овог граничног услова. Поређењем резултата добијених применом Максвеловог граничног услова првог реда са решењима добијеним применом Шамберговог, Дајслеровог или Хсиа-Домотовог граничног услова другог реда, уочава се допринос другог члана у граничном услову који доводи до веће тачности решења. Значај примене граничног услова другог реда је већи за веће вредности Кнудсеновог броја Kn_e и мању вредност карактеристике микролежаја Λ .

У табелама 4.1, 4.2 и 4.3 дата је вредност параметра m за све режиме струјања дате на сликама 4.2, 4.3 и 4.4. Уочава се да вредност m , тј. односа укупног масеног протока кроз лежај (\tilde{m}) и масеног протока који је последица Куетовог струјања (\tilde{m}_C), расте са порастом карактеристике лежаја Λ .

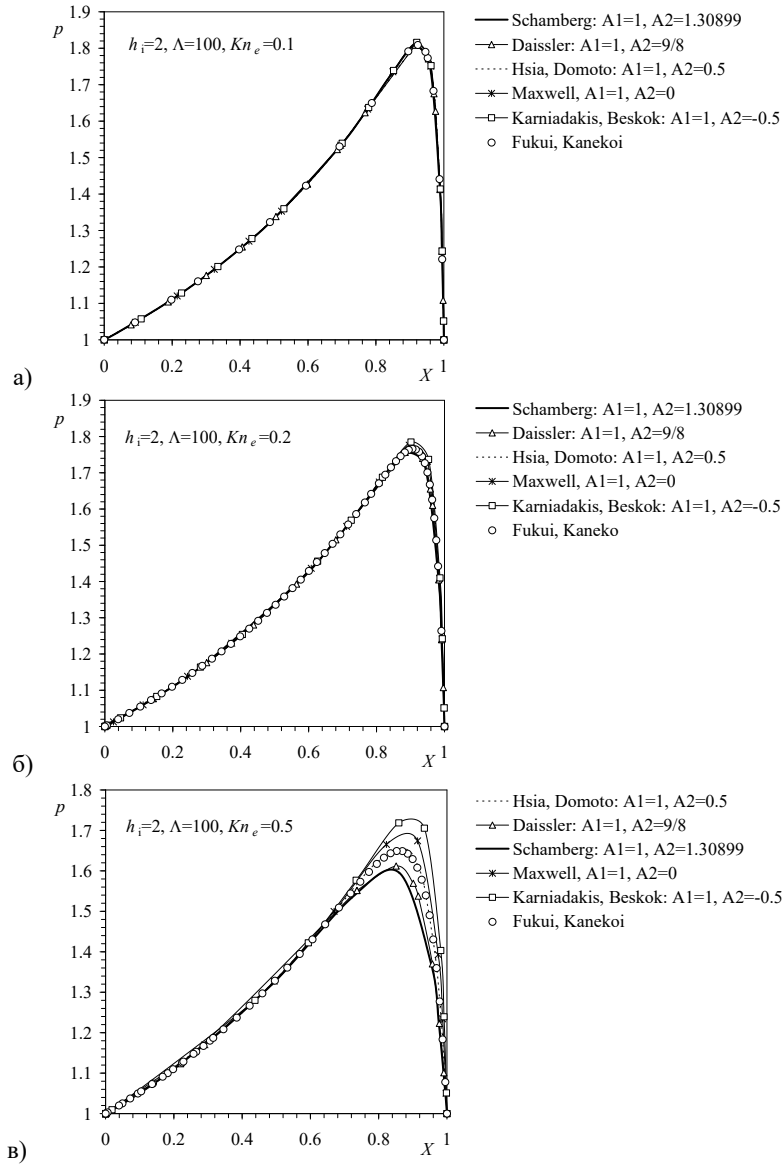
Из општег аналитичког решења које обухвата утицај клизања на зиду лако се изостављањем тог утицаја тј. увођењем у једначине (4.21)–(4.25) да је $Kn_e = 0$, добити решење за расподелу притиска у класичном лежају. То претставља решење Рејнолдсове једначине подмазивања које до сада није дато у литератури. До сада се расподела притиска у лежају која следи из Рејнолдсове једначине налазила само нумерички. На слици 4.5 приказана је расподела притиска у лежајима за три вредности карактеристике Λ ($\Lambda = 1$, $\Lambda = 10$, $\Lambda = 100$) у којима струји гас у условима континуума када је



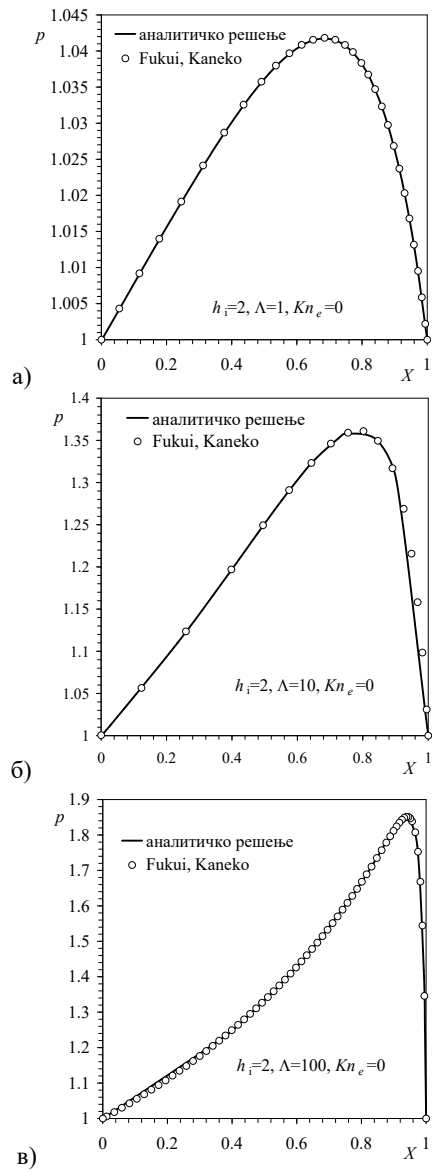
Слика 4.2 Промена притиска у лежају када је однос улазне и излазне висине $h_i = 2$ и карактеристика лежаја $\Lambda = 1$, за вредности референтног Кнудсеновог броја: а) $Kn_e = 0.1$, б) $Kn_e = 0.2$, в) $Kn_e = 0.5$.



Слика 4.3 Промена притиска у лежају када је однос улазне и излазне висине $h_1 = 2$ и карактеристика лежаја $\Lambda = 10$, за вредности референтног Кнудсеновог броја: а) $Kn_e = 0.1$, б) $Kn_e = 0.2$, в) $Kn_e = 0.5$.



Слика 4.4 Промена притиска у лежају када је однос улазне и излазне висине $h_i = 2$ и карактеристика лежаја $\Lambda = 100$, за вредности референтног Кнудсеновог броја: а) $Kn_e = 0.1$, б) $Kn_e = 0.2$, в) $Kn_e = 0.5$.



Слика 4.5 Промена притиска у лежају када нема клизања на зиду $Kn = 0$, при односу улазне и излазне висине $h_i = 2$, за три вредности карактеристике лежаја: а) $\Lambda = 1$, б) $\Lambda = 10$, в) $\Lambda = 100$.

m	$\Lambda = 1$		
	$Kn_e=0.1$	$Kn_e=0.2$	$Kn_e=0.5$
Шамберг: $A_1=1, A_2=5\pi/12$	1.3786	1.38684499	1.40439725
Дајслер: $A_1=1, A_2=9/8$	1.3782	1.38571453	1.40227306
Хсиа-Домото: $A_1=1, A_2=0.5$	1.3765	1.38148332	1.39278746
Максвел: $A_1=1, A_2=0$	1.3752	1.37757981	1.3810488
Карниадакис-Бескок: $A_1=1, A_2=-0.5$	1.3738	1.37322569	1.36167467

Табела 4.1 Вредност параметра m за микролежај при коришћењу различитих граничних услова, код кога је $h_i = 2$, $\Lambda = 1$ за три вредности референтног Кнудсеновог броја $Kn_e=0.1$, $Kn_e=0.2$ и $Kn_e=0.5$

m	$\Lambda = 10$		
	$Kn_e=0.1$	$Kn_e=0.2$	$Kn_e=0.5$
Шамберг: $A_1=1, A_2=5\pi/12$	1.58956611	1.54328227	1.47459769
Дајслер: $A_1=1, A_2=9/8$	1.59080327	1.54496276	1.47629285
Хсиа-Домото: $A_1=1, A_2=0.5$	1.592893	1.55106	1.48381305
Максвел: $A_1=1, A_2=0$	1.59501112	1.55639172	1.4926697
Карниадакис-Бескок: $A_1=1, A_2=-0.5$	1.59770358	1.56220996	1.50598752

Табела 4.2 Вредност параметра m за микролежај при коришћењу различитих граничних услова, код кога је $h_i = 2$, $\Lambda = 10$ за три вредности референтног Кнудсеновог броја $Kn_e=0.1$, $Kn_e=0.2$ и $Kn_e=0.5$.

m	$\Lambda = 100$		
	$Kn_e=0.1$	$Kn_e=0.2$	$Kn_e=0.5$
Шамберг: $A_1=1, A_2=5\pi/12$	1.94642921198738	1.92971684231	1.8608228
Дајслер: $A_1=1, A_2=9/8$	1.94665000001	1.9305999956	1.8661886
Хсиа-Домото: $A_1=1, A_2=0.5$	1.947399999922	1.9336000018	1.88498855
Максвел: $A_1=1, A_2=0$	1.947999999942	1.93600000083	1.899998103
Карниадакис-Бескок: $A_1=1, A_2=-0.5$	1.9485999999575	1.938400000359	1.9149998333

Табела 4.3 Вредност параметра m за микролежај при коришћењу различитих граничних услова, код кога је $h_i = 2$, $\Lambda = 100$ за три вредности референтног Кнудсеновог броја $Kn_e=0.1$, $Kn_e=0.2$ и $Kn_e=0.5$.

Λ	m
1	1.37015855
5	1.513
10	1.6511
20	1.798208
100	1.96

Табела 4.4 Вредност параметра m за лежај код кога је $h_i = 2$, за различите вредности карактеристике лежаја када је $Kn_e=0$.

брзина гаса на зиду једнака брзини зида. Приказани резултати се веома добро слажу са нумеричким решењем Болцманове једначине. У табели 4.4 дата је вредност параметра m за неколико вредности карактеристике лежаја и уочава се да као и у случају струјања са клизањем на зиду, m расте са порастом Λ .

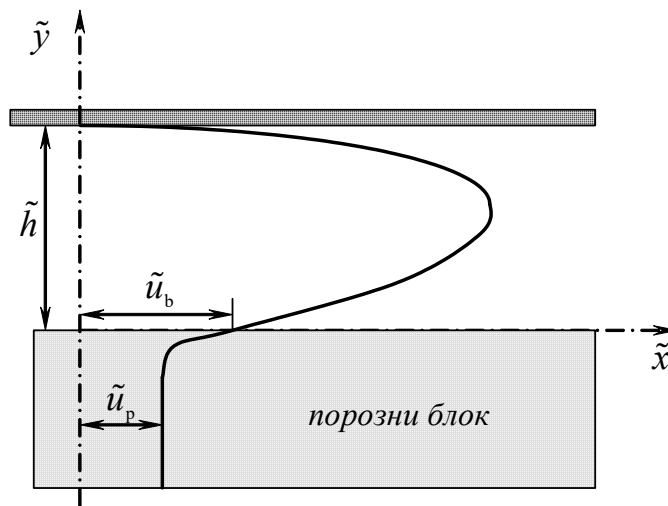
Тачно аналитичко решење приказано у овом поглављу доводи у питање сврсисходност апроксимативног решења датог у поглављу 3 добијеног применом пертурбационих редова. Међутим, ово аналитичко решење не обухвата утицај инерције, а такође не даје решења за неизотермске проблеме струјања гаса у микролежајима. Предност методе пертурбационих редова је у могућности да се и ови утицаји узму о обзир (Stevanovic, 2009; Milicev и Stevanovic, 2008).

5. СТРУЈАЊЕ ГАСА КРОЗ МИКРОКАНАЛЕ СА ПОРОЗНИМ ЗИДОМ

Познато је да коришћење порозних материјала за облагање аеростатичких клизних лежаја и самоподмазујућих клизних лежаја повећава њихову носивост и чврстоћу. Без обзира на то, шира примена оваквих лежаја у инжињерским проблемима у којима је потребна висока прецизност је мала због тешкоће да се тачно опише струјање кроз порозну средину, а и због немогућности да се прецизно предвиди брзина гаса на површини порозног тела кроз које такође струји флуид.

Овде ће се анализирати струјање гаса кроз микроканал са паралелним зидовима, при чему је доњи зид порозан. Кроз порозни зид такође струји гас услед једнаке разлике притисака на улазу и излазу као и у каналу. Оваквим моделом може се описати струјање гаса у порозном аеростатичком лежају.

Код лежаја са порозним зидом уочавају се две карактеристичне области: струјање кроз канал које се описује Навије-Стоксовом једначином, и струјање флуида кроз порозни блок где се користи Дарсијев модел. Решења ових једначина морају да дају исти притисак и тангенцијални напон на површини порозног тела. Беверс и Јозеф (Beavers и Joseph, 1967; Beavers и др., 1974) су на основу својих експеримената и димензијске анализе дефинисали израз за брзину на порозној површини. Они су претпоставили да брзина на порозној



Слика 5.1 Профил брзине у микроканалу са доњим порозним зидом.

површини није иста као у порозном блоку и да се она у танком слоју порозног блока брзо мења и изједначава са Дарсијевом брзином у блоку (слика 5.1). Такође је претпостављено да је брзина клизања пропорционална тангенцијалном напону у каналу на тој површини:

$$\frac{d\tilde{u}}{d\tilde{y}} = \beta(\tilde{u}_b - \tilde{u}_p) \quad (5.1)$$

где је \tilde{u}_b брзина на порозној површини, \tilde{u}_p средња подужна брзина струјања у порозном блоку, а β коефицијент пропорционалности. Димензијском анализом дошли су до закључка да би коефицијент β могао да се дефинише као α/\sqrt{k} , где је k коефицијент пермеабилности порозног блока, а α бездимензијска величина која зависи само од структуре порозног материјала у граничном слоју која је названа коефицијент клизања. Сада је израз за брзину на порозној површини:

$$\tilde{u}_b = \tilde{u}_p + \frac{\sqrt{k}}{\alpha} \frac{d\tilde{u}}{d\tilde{y}} \quad (5.2)$$

Може се уочити аналогија између израза којима се дефинише брзина клизања услед ефекта разређености и услед струјања флуида преко порозне површине, мада не постоји физичка веза између њих.

Беверс и Јозеф су експериментима са водом и гасом, (Beavers и Joseph, 1967; Beavers и др., 1974) потврдили исправност својих претпоставки. Осим тога, у њима је показано да присуство порозног зида кроз који се одвија струјање при истој разлици притисака као и у каналу, доводи до релативно повећања масеног протока кроз канал у односу на струјање без порозног зида. Користећи гранични услов (5.2) и Пуазејев модел струјања у каналу показали су да је то релативно повећање масеног протока:

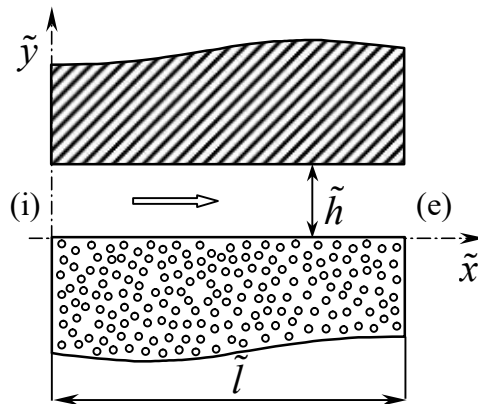
$$\frac{\tilde{m}}{\tilde{m}_0} - 1 = \frac{3(\tilde{\sigma} + 2\alpha)}{\tilde{\sigma}(1 + \alpha\tilde{\sigma})} \quad (5.3)$$

где је $\tilde{\sigma} = \tilde{h}/\sqrt{k}$, а \tilde{h} висина канала. Овај израз указује да прираштај масеног протока због присуства порозног блока зависи од димензије канала, пропустљивости порозног блока и његове структуре, а не и од односа притисака на улазу и излазу канала.

Кван и Корбет (Kwan и Corbett, 1998) су такође мерили проток у каналима чија је једна страна порозна. Висина тих канал је између $10\mu\text{m}$ и $100\mu\text{m}$, па се они могу сврстати у микроканале. Мерења су показала значајно одступање од теорије Беверса и Јозефа при малим висинама канала \tilde{h} . Тако је за $\tilde{h} \leq 10\mu\text{m}$ добијено да је релативно повећање масеног протока у односу на случај када би се присуство порозног зида занемарило веће за 100% у односу на теоријско предвиђање Беверсовог образаца. То је навело ауторе рада да проблем решавају увођењем додатне висине \tilde{h}_e каналу без порозних зидова при којој би проток у њему био исти као проток у каналу у коме је један зид порозан. Висина \tilde{h}_e зависи од структуре порозног материјала и треба је експериментално одредити.

С обзиром да су експерименти Квана и Корбета рађени са каналима чије се димензије мере у μm , дошло се на идеју да се при прорачуну узме у обзир и ефекат разређености гаса и тиме евентуално добију изрази за проток који би се боље слагали са експериментом. Осим тога инерција је при извођењу релације (5.3) занемарена, а вредности Рејнолдсовог броја у овим експериментима нису мале, па би утицај инерције требало узети у обзир.

Анализирани модел микроканала приказан је на слици 5.2. Гас струји кроз микроканал висине \tilde{h} , и дужине \tilde{l} . Горњи зид канала је направљен од чврстог материјала, а доњи је порозан, исте дужине као и канал. Струјање



Слика 5.2 Микроканал са порозним зидом.

гаса кроз микроканал и кроз порозни слој одвија се услед исте разлике притиска на улазу и излазу. Струјање гаса у оба слоја је изотермско, стишљиво и стационарно. Предпостављено је да је однос висине и дужине канала мали, па се мали параметар ε дефинише као: $\varepsilon = \tilde{h}/\tilde{l}$. Висина канала је реда величине μm , па се при прорачуну мора узети у обзир ефекат клизања на зиду. Услови струјања у микроканалу исти су као и у моделима описаним у поглављима 2 и 3, па су и основне једначине исте (2.19)-(2.22). У овом случају једначине се свode на бездимензијски облик коришћењем следећих размера: за дужине - висина канала \tilde{h} , за брзине - средња брзина на излазу \tilde{u}_e , за притисак и густину - притисак \tilde{p}_e и густина $\tilde{\rho}_e$ на излазу. Промене свих величина у правцу струјања су веома мале, што се узима у обзир увођењем споре координате $\tilde{\xi} = \varepsilon\tilde{x}$. Подужна компонента брзине \tilde{u} је знатно већа од попречне \tilde{v} па је: $\tilde{v}(\tilde{x}, \tilde{y}) = \varepsilon\tilde{V}(\tilde{\xi}, \tilde{y})$, $\tilde{V}(\tilde{\xi}, \tilde{y}) = O(1)$. Осим тога, претпостављено је да се струјање одвија при малим вредностима Маховог броја, па се може усвојити да је:

$$\frac{\kappa M_e^2}{Re_e} = m\varepsilon, \quad m = O(1) \quad (5.4)$$

где је κ однос специфичних топлота c_p/c_v , M_e је референтни Маховов број ($M_e = \tilde{u}_e/\sqrt{\kappa\tilde{p}_e/\tilde{\rho}_e}$), Re_e референтна вредност Рејнолдсовог броја ($Re_e = \tilde{\rho}_e\tilde{u}_e\tilde{\delta}_e/\tilde{\mu}$) и m је параметар чија дефиниција следи из релације (5.4):

$$m = \frac{\tilde{l}}{\tilde{h}^3} \frac{\tilde{\mu}R\tilde{T}}{\tilde{p}_e^2} \tilde{m} \quad (5.5)$$

У овом изразу $\tilde{\mu}$ је динамичка вискозност, R је гасна константа, \tilde{T} температура гаса и $\tilde{m} = \tilde{\rho}_e\tilde{u}_e\tilde{h}$ је масени проток по јединици ширине канала. Сада се једначина континуитета, Навије-Стоксова једначине за x и y правца и једначина стања идеалног гаса свode на бездимензијски облик:

$$\frac{\partial(pu)}{\partial\xi} + \frac{\partial(pV)}{\partial y} = 0 \quad (5.6)$$

$$m\varepsilon Re_\varepsilon p \left(u \frac{\partial u}{\partial \xi} + V \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial p}{\partial \xi} + m \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + O(\varepsilon^2) \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = O(\varepsilon^2) \quad (5.8)$$

$$p = \rho \quad (5.9)$$

Горњи зид мирује али се због мале висине микроканала на њему јавља ефекат клизања. Тај ефекат се узима у обзир коришћењем Максвеловог граничног услова клизања првог реда. У бездимензијском облику он је:

$$y=1: \quad u = -\frac{2-\sigma_{v2}}{\sigma_{v2}} \frac{Kn_\varepsilon}{p} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad V(\xi,1)=0 \quad (5.10)$$

где је σ_{v2} коефицијент акомодације горњег зида, а Kn_ε вредност референтног Кнудсеновог броја.

Доњи зид микроканала је порозан. Кроз тај порозни слој услед исте разлике притиска између улазног и излазног пресека као и у микроканалу, струји гас. Струјање кроз порозну средину описује се Дарсијевим законом. Тај закон у правцу x -осе има следећи облик:

$$\tilde{u}_p = -\frac{k}{\tilde{\mu}} \frac{\partial \tilde{p}}{\partial \tilde{x}} \quad (5.11)$$

где је k коефицијент пермеабилности порозног слоја. Међутим, при струјању флуида преко порозне површине која чини контуру неког порозног тела, кроз које се такође одвија струјање, не може се гранични услов на зиду описати само помоћу Дарсијевог закона. Порозна површина доводи до додатног проклизавања флуида. Зато је потребно да се брзина \tilde{u}_p на порозној површини коригује. Ту поправку дефинисали су помоћу димензијске анализе и експерименталних резултата Беверс и Јозеф (Beavers и Joseph, 1967; Beavers и др., 1974), на начин описан једначином (5.2). На доњем, порозном зиду брзина клизања је:

$$y=0: \quad u = u_w + \frac{2-\sigma_{v1}}{\sigma_{v1}} \frac{Kn_\varepsilon}{p} \frac{\partial u}{\partial y}, \quad V(\xi,0)=0 \quad (5.12)$$

Литература

1. Agarwal KR, Yun KY (2002) Burnett Simulations of Flows in Microdevices. The MEMS Handbook, Editor Gad-el-Hak M, CRC Press
2. Arkilic EB (1997) Measurement of the Mass Flow and Tangential Momentum Accommodation Coefficient in Silicon Micromachined Channels. PhD thesis, Massachusetts Institute of Tehnology, Cambrige
3. Arkilic EB, Breuer KS, Schmidt MA (1994) Gaseous flow in microchannels. In ASME, FED-197, Application of Microfabrication to Fluid Mechanics: 57-66
4. Arkilic EB, Breuer KS, Schmidt MA (1997) TMAC Measurement in Silicon Micromachined Channels. In Rarefied Gas Dynamics 20, ed. C. Shen, Beijing University Press, Beijing, China: 6
5. Bayt LR (1999) Analisis, Fabrication and Testing of a MEMS-based Micropropulsion System. PhD thesis, Massachusetts Institute of Tehnology, Cambrige
6. Beavers SG, Joseph DD (1967) Boundary Conditions at a Naturally Permeable Wall. J Fluid Mech 30: 197-207
7. Beavers SG, Sparrow ME, Mash AB (1974) Boundary Condition at a Porous Surface Which Bounds a Fluid Flow. AIChE Journal 20: 596-597
8. Beskok A, Karniadakis G (1994) Simulation of heat and momentum transfer in complex micro-geometries. J of Thermophysics and Heat Transfer 8, No. 4: 647-655
9. Beskok A, Karniadakis G (1999) A Model for Flows in Channels, Pipes and Ducts at Micro and Nano Scales. Microscale Thermophys. Eng. 3: 43-77
10. Beskok A, Karniadakis G, Trimmer W (1996) Rarefaction and Compressibility Effects in Gas Microflows. J Fluids Eng 118: 448-456
11. Beskok A (2001) Validation of a New Velocity-Slip Model for Separated Gas Microflows. Numerical Heat Transfer 40: 451-471
12. Djordjević DV, Crnojević C (2001) On the Gas Lubrication by Injection Through a Permeable Wall. Facta Universitatis 3, No. 11: 29-37
13. Feynman RP (1960) There's Plenty of Room at the Bottom. Issue of Caltech's Engineering and Science
14. Gad-El-Hak M (1999) The Fluid Mechanics of Microdevices-The Freeman Scholar Lecture. J Fluids Engineering 121: 5-33

15. Gad-El-Hak M (2002) The MEMS Handbook. CRC Press
16. Harly C, Huang Y, Bau H, Zemel J (1995) Gas Flow in Microchannels.. J Fluid Mechanics 284: 257-274
17. Karniadakis G, Beskok A (2002) Micro Flows. Springer-Verlag, New York
18. Kwan YBP, Corbett J (1998) A Simplified Method for the Correction of Velocity Slip and Inertia Effects in Porous Aerostatic Thrust Bearings. Tribology International 31, No.12: 779-786
19. Liu J, Tai Y, Pong K, Ho C (1993) Micromachined Channel/Pressurer Sensor Systems for Micro Flow Studies. In the Seventh Int. Conf. On Solid-State Sensors and Actuators: 995-998
20. Pfahler J, Harley C, Bau H, Zemel J (1991) Gas and Liquid Flow in Small Channels. ASME 32: 49-59
21. Pong K, Ho C, Liu J, Tai Y (1994) Non-Linear Pressure Distribution in Uniform Microchannels. In ASME, FED-197, Application of Microfabrication to Fluid Mechanics: 51-56
22. Schaaf AS (1963) Mechanics of Rarefied Gases. In Encyclopedia of Physics, Springer-Verlag-Berlin VIII/2: 591-625
23. Schaaf AS, Chambre AP (1958) Flow of Rarefied Gases, In Fundamentals of Gas Dynamics. Editor Emmons,WH, Princeton University Press, Princeton
24. Shen C, Fan J, Xie C (2003) Statistical Simulation of Rarefied Gas Flows in Micro-Channels. J. of Computational Physics 189: 512-526
25. Shih CJ, Ho C, Liu J, Tai Y (1996) Monoatomic and Polyatomic Gas Flow Through Uniform Microchannels. In ASME Microelectromechanical Systems DSC 59: 197-203
26. Stevanović N, Djordjević DV (2002) Low Mach Number, High Order Rarefied Gas Flow in Micro-Channels. Facta Universitatis 3 No. 12: 365-371
27. Stevanović N (2001) Izotermno strujanje razređenog gasa u mikrokanalima pri malim vrednostima Mach-ovog broja. Procesna tehnika 1: 30-34
28. Stevanović N (2003) A High Order Theory for an Isothermal Rarefied Gas in Micro Channels. 4th ASME/JSME Joint Fluids Engineering Conference, Hawaii, USA
29. Stevanović N, Djordjević DV (2005) On the simultaneous effects of gas rarefaction, wall porosity, and inertia in micro channel flows. ZAMM 7: 516-522

30. Stevanović N (2005) Friction pressure loss in micro channel rarefied gas flows. FME Transactions 33: 65-72
31. Stevanović N (2007) A new analytical solution of micro channel gas flow. J Micromech Microeng 17: 1695-1702
32. Milićev S, Stevanović N (2008) A constant wall temperature micropchannel gas flow. 1st European conference on microfluidics, Bologna, Italy
33. Stevanović N (2009) Analytical solution of gas lubricated slider microbearing. Microfluid. Nanofluid, 7 No1:97-105
34. Stevanović N, Milićev S (2009) Inertia effect in microbearing gas flow. 11th International Conference on Tribology, Belgrade, Serbia
35. Tien LC, Lienhard H J (1971) Statistical Thermodynamics, HRW, New York
36. Trimmer W, Stroud HR (2002) Scaling of Micromechanical Devices. The MEMS Handbook, Editor Gad-el-Hak M, CRC Press
37. Vinsenti GW, Kruger HC (1986) Introduction to Physical Gas Dynamics. RE Krieger Publishing Company, Malabar, Florida
38. Fukui S, Kaneko R (1988) Analysis of ultra-thin gas film lubrication based on linearized Boltzmann equation. First report-derivation of a generalized lubrication equation including thermal creep flow. J Tribol 110: 253-262
39. Fukui S, Kaneko R (1990) A database for interpolation of Poiseuille flow rates for high Knudsen number lubrication problems. J Tribol 112: 78-83
40. Hsia Y, Domoto G (1983) An experimental investigation of molecular rarefaction effects in gas-lubricated bearings at ultra low clearances. J Lubr Technol. 105: 120-130
41. Sun YH, Chan WK, Liu NY (2003) A slip model for gas lubrication based on an effective viscosity concept. J Eng Tribol 217: 187-195
42. Deissler RG (1964) An analysis of second-order slip flow and temperature-jump boundary conditions for rarefied gases. J Heat Mass Transf 7: 681-694
43. Lockerby DA, Reese JM, Emerson DR, Barber RW (2004) Velocity boundary condition at solid wall in rarefied gas calculation. Phys Rev. E 70: 017303
44. Aubert C, Colin S (2001) High-order boundary conditions for gaseous flows in rectangular microducts. Microscale Thermo-physical Engineering 5: 41-54

45. Zohar Y, Lee SYK, Lee WY, Jiang L, Tong P (2002) Subsonic gas flow in a straight and uniform microchannel. *J Fluid Mech* 472: 125-151
46. Graur IA, Meolans JG, Zeitoun DE (2006) Analytical and numerical description for isothermal gas flows in microchannels. *Microfluid Nanofluid* 2: 64-77
47. Burgdorfer A (1959) The influence of the molecular mean free path on the performance of hydrodynamic gas lubricated bearing. *J Basic Eng Trans* 81: 94-100
48. Mitsuya Y (1993) Modified Reynolds equation for ultra-thin film gas lubrication using 1.5-order slip-flow model and considering surface accommodation coefficient. *ASME J Tribol.* 115: 289-294
49. Veijola T, Turowski M (2000) Compact damping models for laterally moving microstructures with gas-rarefaction effects. Espoo Circuit Theory Laboratory Helsinki University of Technology
50. Bahukudumbi P, Beskok A (2003) A phenomenological lubrication model for the entire Knudsen regime. *J Micromech And Microeng.* 13: 873-884
51. Liu N, Ng EYK (2001) The posture effects of a slider air bearing on its performance with a direct simulation Monte Carlo method. *J Micromech. Microeng* 11: 463-473
52. Ng EYK, Liu N, Mao X (2002) Stress-density ratio slip-corrected Reynolds equation for ultra-thin film bearing lubrication. *Phis. Fluids* 14: 1450-1457
53. Zhong X (1993) On Numerical Solutions of Burnett Equations for Hypersonic Flow past 2-D Circular Blunt Leading edges in Continuum Transition Regime. *AIAA 42. Fluid Dynamics Conf.* (Orlando, FL, 6-9 July 1993) AIAA 93-3092
54. Schamberg R (1947) The fundamental differential equations and the boundary conditions for high speed slip-flow, and their application to several specific problems. Ph. D. thesis California Institute of Tehnology